

Mengenlehre

Mengen

Mengen sind Zusammenfassungen von Objekten (Zahlen, Funktionen, etc.).

Schreibweise $M = \{m_1, \dots, m_n\}$

• $m_1, \dots, m_n \in M$ (Element aus)

• $\{m_1, m_2\} \subseteq M$ (Teilmenge)

• Leere Menge: $\emptyset = \{\} \neq \{\emptyset\} \Rightarrow$ Die Leere Menge selbst ist wieder eine Menge

• Ordnungsaxiome: $(\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R})$

↳ Es gilt genau eine der Beziehungen: $a < b, a = b, a > b$

↳ Aus $a < b$ und $b < c$ folgt $a < c$

↳ Aus $a < b$ folgt $a + c < b + c$

↳ Aus $a < b$ folgt $a \cdot c < b \cdot c \quad \forall c > 0$

• Archimedisches Axiom: $(\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R})$

↳ $\forall a, b > 0 \exists$ eine Zahl n , sodass $n \cdot a > b$

• Vollständigkeitsaxiom: (\mathbb{R})

↳ Jede nicht-leere und nach oben beschränkte Menge besitzt ein Supremum

• $\infty \notin \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

• Körperaxiome: $(\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C})$

↳ $a + b = b + a$ ↳ $(a + b) + c = a + (b + c)$

↳ \exists eine Zahl 0 , sodass $a + 0 = a$

↳ Zu jeder Zahl $a \exists$ eine Zahl $(-a)$ sodass $a + (-a) = 0$

↳ $a \cdot b = b \cdot a$ ↳ $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

↳ \exists eine Zahl 1 , sodass $a \cdot 1 = a$; $1 \neq 0$

↳ Zu jeder Zahl $a \neq 0 \exists a^{-1}$, sodass $a \cdot a^{-1} = 1$

↳ $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Eigenschaften geordneter Mengen

• Eine Zahl s heißt obere/untere Schranke einer Menge M , wenn keine Zahl $\in M$ größer/kleiner ist als s .

• Die kleinste, obere Schranke von M heißt Supremum, die größte, untere Schranke Infimum.

• Sind Supremum/Infimum $\in M$, so heißen sie Maximum/Minimum.

• Ein Intervall ist eine Teilmenge einer geordneten Trägermenge. Ein Intervall ist zusammenhängend. Schreibweise: $J = [a, b] = \{x \mid x \in M; a \leq x \leq b\}$ $J = (a, b) = \{x \mid x \in M; a < x < b\}$

Hier ist $[a, b]$ ein geschlossenes- und (a, b) ein offenes Intervall.

↳ J ist kompakt

↳ auch unendliche Grenzen $(-\infty, \infty)$ sind möglich.

Eigenschaften mehrdimensionaler Mengen (\mathbb{R}^n)

• Eine geordnete Menge heißt beschränkt, wenn eine obere- und eine untere Schranke existieren.
Eine ungeordnete Menge, auf der eine Abstandsfunktion $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ definiert ist, heißt beschränkt, wenn für alle $a, b \in M$ $d(a, b)$ beschränkt ist.

• M heißt offen, wenn ein ε existiert, sodass $\forall x, \xi$; $x \in M$; $|x - \xi| < \varepsilon$ gilt: $\xi \in M$

• M heißt abgeschlossen, wenn ihr absoluter Komplement offen ist.

• M heißt Kompakt, wenn M beschränkt und abgeschlossen ist.

• Der Rand ∂M einer Menge ist die Menge aller Punkte p , für die für jedes $\varepsilon > 0$ ein Punkt $a \in M$, sowie ein Punkt $b \notin M$ existiert, sodass $d(a, p) \leq \varepsilon$ und $d(b, p) \leq \varepsilon$.

↳ $M \setminus \partial M$ ist offen ↳ $M \cup \partial M$ ist abgeschlossen, falls M beschränkt ↳ $\dim(\partial M) = \dim(M) - 1$

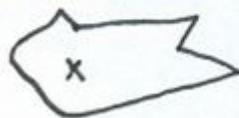
• M heißt wegzusammenhängend, wenn $\forall a, b \in M$ ein Weg existiert, der a und b verbindet und komplett in M verläuft.

• M heißt sternförmig, wenn ein Punkt $m \in M$ existiert, sodass $\forall a \in M$ eine Gerade existiert, die a und m verbindet und komplett in M liegt.

• M heißt Konvex, wenn $\forall a, b \in M$ eine Gerade existiert, die a und b verbindet und komplett in M liegt.

• M heißt ein Gebiet, wenn offen und wegzusammenhängend.

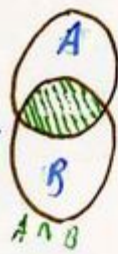
• Ein Gebiet M heißt einfach zusammenhängend, wenn mit jeder ganz in M verlaufenden, geschlossenen, doppel-punktfreien Kurve auch deren Innengebiet in M liegt.



Konvex \Rightarrow sternförmig \Rightarrow einfach zusammenh. \Rightarrow wegzusammenh. nicht-wegzusammenh.

Mengenoperationen

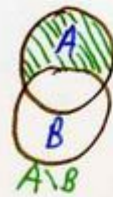
• **Schnittmenge:** Sei U eine Menge aus Mengen -
 $U = \{\{m_1, g, m_2\}, \{m_3, g\}, \{g\}\}$
 Dann ist $\cap U = \{g\}$, also die Menge aller Elemente, die in allen Mengen enthalten sind. Mit $U = \{A, B\}$: $\cap U = A \cap B = \{x | (x \in A) \wedge (x \in B)\}$



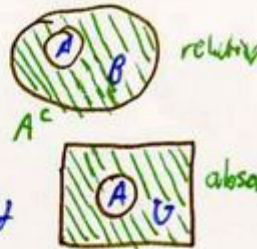
• **Vereinigung:** Sei U eine Menge aus Mengen: $U = \{\{m_1, g, m_2\}, \{m_3, g\}, \{g\}\}$, dann ist $\cup U = \{m_1, g, m_2, m_3\}$. Mit $U = \{A, B\}$: $\cup U = A \cup B = \{x | (x \in A) \vee (x \in B)\}$



• **Differenz:** $A \setminus B = \{x | (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$, also die Menge aller Elemente, die in A , aber nicht in B enthalten sind.



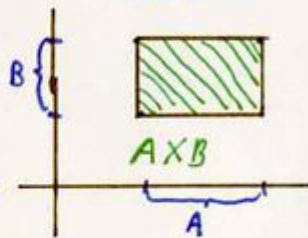
• **Komplement:** Sei $A \subseteq B$, dann ist $A^c = B \setminus A$ das relative Komplement von A . Sei $A \subseteq U$ (U ist hier eine Grundmenge) dann ist $A^c = U \setminus A = \{x | x \notin A\}$ das absolute Komplement



• **Symmetrische Differenz:**
 $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = \{x | (x \in A) \oplus (x \in B)\}$



• **Kartesisches Produkt:**
 $A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\} = \{a_1, b_1\}, \dots, \{a_1, b_n\}, \dots, \{a_n, b_1\}, \dots, \{a_n, b_n\}$ ist die Menge aller geordneter Paare.



Regeln:

$$\begin{aligned} A \times B &\neq B \times A & A \times (B \times C) &\neq (A \times B) \times C & (A \cup B) \times C &= (A \times C) \cup (B \times C) \\ (A \cap B) \times C &= (A \times C) \cap (B \times C) & (A \setminus B) \times C &= (A \times C) \setminus (B \times C) \\ (A_1 \times A_2) \subseteq (B_1 \times B_2) &\Leftrightarrow A_1 \subseteq B_1; A_2 \subseteq B_2 \end{aligned}$$

Jordan-Maß, Nullmenge

Siehe auch: Differential & Integralrechnung: Riemann Integrale im \mathbb{R}^n
 Grenzwerte & Stetigkeit: Lipschitzstetigkeit

Eine nicht-leere, beschränkte Menge M heißt Jordan-messbar, wenn ihre charakteristische Funktion χ_M Riemann-integrierbar ist.

$$M \subseteq \mathbb{R}^n \quad \chi_M: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} := \chi_M(x) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } x \in M \\ 0, & \text{wenn } x \notin M \end{cases}$$

$$\mu(M) := \int_J \chi_M(x) dx = \int_M 1 dx$$

mit J als ein Intervall, sodass $M \subseteq J \subseteq \mathbb{R}^n$

• μ ist der Jordan-Inhalt von M

• Sei J_1, \dots, J_k eine Zerlegung von M in Teilmengen.

$$\text{Nun gilt: } \inf_{x \in J_k} \chi_M(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } J_k \cap M = J_k \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{und } \sup_{x \in J_k} \chi_M(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } J_k \cap M \neq \emptyset \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

kleinster und größter Wert in J_k

Zerlegt man M in unendlich viele, infinitesimal kleine Intervalle, dann ist M genau dann Jordan-messbar, wenn der innere Jordan-Inhalt $\sum_k \inf_{x \in J_k} \chi_M(x)$ und der äußere Jordan-Inhalt $\sum_k \sup_{x \in J_k} \chi_M(x)$ gegen den gleichen Wert konvergieren.

χ startet immer im \mathbb{R}^n . Eine Teilmenge aus \mathbb{R}^n ist deswegen nicht Jordan-messbar (in jedem Intervall liegen unendlich viele Werte in und außerhalb von \mathbb{Q})

• wenn $\mu(M) = 0$, dann ist M eine Jordansche Nullmenge

• Eine nicht-leere, beschränkte Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann Jordan-messbar, wenn ihr Rand ∂M eine Jordansche Nullmenge ist.

• wenn $M \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar und $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, dann ist der Graph von f , also $\{(\vec{x}, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \vec{x} \in M, y = f(\vec{x})\}$ eine Jordansche Nullmenge im \mathbb{R}^{n+1} .

• Wenn $M \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordansche Nullmenge und $f: M \rightarrow \mathbb{R}^m$; $m \geq n$ Lipschitzstetig, dann ist $f(M)$ ebenfalls eine Jordansche Nullmenge (im \mathbb{R}^m).

• Stetige Funktionen auf kompakten Jordan-messbaren Mengen sind Riemann-integrierbar.

• Sind $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar, so gilt:

$\Rightarrow A \cup B$ ist Jordan-messbar $\Leftrightarrow A \cap B$ ist Jordan-messbar $\Leftrightarrow A \setminus B$ ist Jordan-messbar

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$$

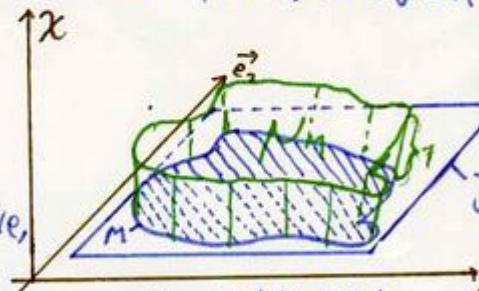


Abbildung (Funktion)

Eine Abbildung ist eine Relation zwischen zwei Mengen A und B , die jedem $x \in A$ genau ein $y \in B$ zuordnet: $f: A \rightarrow B$

• $A = D(f)$ heißt Definitionsbereich von f und Urbild von y

• $B = B(f)$ heißt Wertebereich oder Bildmenge von f und Bild von x

• f heißt injektiv, wenn jedes $y \in B$ höchstens ein Urbild hat.

• f heißt surjektiv, wenn jedes $y \in B$ mindestens ein Urbild hat.

• f heißt bijektiv, wenn jedes $y \in B$ genau ein Urbild hat. f ist bijektiv, wenn injektiv und surjektiv.

↳ bijektive Abbildungen sind umkehrbar.

↳ Graph: Der Funktionsgraph ist die Menge aller $\{(\vec{x}, \vec{y}) \in A \times B; \vec{x} \in A; \vec{y} = f(\vec{x})\}$

↳ Implizite/Explizite Funktion:

Explizite Funktionen verknüpfen Bild- und Urbild mittels Zuordnungsvorschriften, wie $y = f(x)$. Implizite Funktionen verknüpfen $F(x, y) = 0$. siehe auch: implizite Funktion

• Eine Abbildung f heißt additiv, wenn $f(x+y) = f(x) + f(y); \forall x, y \in D$

• Eine Abbildung f heißt homogen, wenn $f(a \cdot x) = a \cdot f(x); \forall a \in \mathbb{R}; \forall x \in D$

Implizite Funktionen und Umkehrabbildungen

Seien $A \subseteq \mathbb{R}^m$ und $B \subseteq \mathbb{R}^n$; $\vec{x} \in A, \vec{y} \in B$; $F: A \times B \rightarrow \mathbb{R}^n$ $F(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{0}$

F sei stetig differenzierbar. Nun ist:

$$DF = \frac{\partial F}{\partial (\vec{x}, \vec{y})} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_m} & \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_m} & \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{array} \right)$$

Quadratische Teilmatrix

Wenn die quadratische Teilmatrix $\frac{\partial F}{\partial \vec{y}}$ invertierbar ist, so existiert in offenen Umgebungen $U(\vec{x}) \subseteq A$ und $V(\vec{y}) \subseteq B$, sowie eine eindeutige, stetig differenzierbare Funktion $f: U \rightarrow V$ mit $f(\vec{x}) = \vec{y}$.

↳ Es existiert keine eindeutige Lösung, wenn $\frac{\partial F}{\partial \vec{y}}$ nicht invertierbar ist!

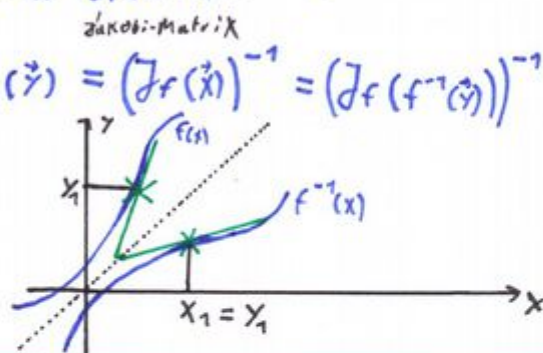
Satz von der Umkehrfunktion

Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$; $f: A \rightarrow B$ bijektiv; $\vec{y} = f(\vec{x})$; $Df(\vec{x}) = J_f(\vec{x})$ sei invertierbar $\forall \vec{x} \in A$

Nun ist $f^{-1}: B \rightarrow A$ stetig differenzierbar:

$$Df^{-1}(\vec{y}) = (Df(\vec{x}))^{-1} = (Df(f^{-1}(\vec{y})))^{-1} \Leftrightarrow J_{f^{-1}}(\vec{y}) = (J_f(\vec{x}))^{-1} = (J_f(f^{-1}(\vec{y})))^{-1}$$

↳ in \mathbb{R}^1 : $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$



Mittelwertsatz

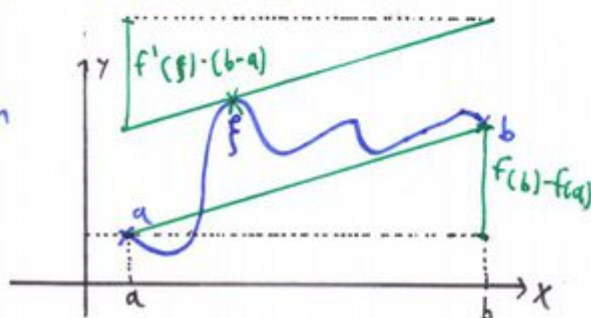
Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $\vec{x} + t \cdot \vec{h} \in D \forall t \in [0, 1]$.

Es existiert ein $\tau \in (0, 1)$, sodass $f(\vec{x} + \vec{h}) - f(\vec{x}) = f'(\vec{x} + \tau \cdot \vec{h}) \cdot \vec{h}$

$$\Leftrightarrow f(\vec{x} + \vec{h}) - f(\vec{x}) = \int_0^1 f'(\vec{x} + \tau \cdot \vec{h}) \cdot \vec{h} d\tau$$

↳ Für \mathbb{R}^1 : Für zwei Punkte a, b existiert ein

$$\xi \in (a, b) \text{ sodass } f(b) - f(a) = f'(\xi) \cdot (b - a)$$



Folgen und Reihen

Schreibweise

$$a: \mathbb{N} \rightarrow X \quad i \mapsto a_i \quad := (a_i)_{i \in \mathbb{N}} \quad := (a_1, \dots, a_n) := \lim_{i \rightarrow \infty} a_i \quad := \sum_{i=0}^n a_i$$

endliche Folge

unendliche Folge

Reihe

Hierbei ist i der Index, n der letzte Index der Folge und a_i die Folgeglieder. Folgen über Summen heißen Reihen.

- Existiert der Grenzwert $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i$, so ist a Konvergent.
- Existiert der Grenzwert $\lim_{i \rightarrow \infty} |a_i|$, so ist a absolut Konvergent.

Konvergenzkriterien

- Wenn $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ konvergent, dann ist $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k$ eine Nullfolge. (Umkehrung gilt nicht)
- Gibt es für alle $\varepsilon > 0$ ein N , sodass für alle $m, n \geq N$ $|a_m - a_n| < \varepsilon$ ist, dann ist a konvergent.
- $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$; $q^* = \begin{cases} \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| & \text{(Quotientenkriterium)} \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} & \text{(Wurzelkriterium)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q^* > 1: \text{Reihe divergiert} \\ q^* = 1: \text{Keine Aussage} \\ q^* < 1: \text{Reihe konvergiert absolut} \end{cases}$
- Sei $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ und monoton fallend, dann konvergiert $\sum_{i=1}^{\infty} f(i)$ genau dann, wenn $\int f(x) dx$ existiert.
- Sei $\sum_{i=0}^n b_i$ beschränkt und die Folge $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = 0$; $a_i \geq \hat{a}_i \geq 0$ eine monoton fallende Nullfolge, dann ist $\sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot b_i$ konvergent (insb. für $b_i = (-1)^i$)
- Sei $a_i > 0$; $a_i \in \mathbb{R}$ und $\frac{a_{i+1}}{a_i} = 1 - \frac{\alpha}{i} + \frac{\theta_i}{i^2}$ oder $\frac{a_i}{a_{i+1}} = 1 + \frac{\alpha}{i} + \frac{\theta_i}{i^2}$ mit $\alpha > 1$ und die Folge θ_i sei beschränkt, dann ist $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ konvergent für $\alpha > 1$, sonst divergent.
- Sei $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ mit $a_i \in \mathbb{R}$. Existiert eine konvergente Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} b_i$ mit $|a_i| \leq b_i$, dann konvergiert $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ absolut. Existiert eine divergente Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} c_i$ mit $a_i \geq |c_i|$, dann ist $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ divergent.
- Sei $a_i > 0$ und $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ nach oben beschränkt, dann ist $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ konvergent.
- Sei $\sum_{i=0}^{\infty} b_i$ konvergent und a von endlicher Variation (in \mathbb{R} oder \mathbb{C}), dann ist $\sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot b_i$ konvergent.
- $\sum_{i=1}^{\infty} f(i) \Rightarrow q = \frac{f(i+1)}{f(i)}$ für große i gilt: $\begin{cases} q < 1 \Rightarrow \text{absolut konvergent} \\ q \geq 1 \Rightarrow \text{divergent} \end{cases}$
- Sei $a_i > 0$ monoton fallend, dann hat $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ das gleiche Konvergenzverhalten, wie $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$

Cauchyprodukt

Seien $A = \sum_{i=0}^{\infty} a_i$ und $B = \sum_{i=0}^{\infty} b_i$ absolut konvergent, dann existiert: $C = A \cdot B$ und gilt:

$$C = A \cdot B = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i \right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} b_i \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k a_{k-i} b_i$$

$\cdot C$ ist ebenfalls absolut konvergent.
 \cdot Grenzwert von $A \cdot$ Grenzwert von B
 \cdot Grenzwert von C

Spezielle Grenzwerte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = e^x \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\alpha} \cdot q^n, q < 1 = 0 \quad \sum_{i=0}^{\infty} q^i, q < 1 = \frac{1}{1-q}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i^q} \text{ konvergiert } \forall q > 1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n)}{n^{\alpha}}; \alpha > 0 = 0$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \quad \cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \quad \sinh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} \quad \cosh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} x^{2k}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k \quad \operatorname{asin}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{-1/2}{i} \frac{(-1)^i}{2i+1} x^{2i+1} \quad \operatorname{atan}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2i+1} x^{2i+1}$$

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\alpha}{i} x^i$$

Gleichmäßige Konvergenz

Sei $f_n: D \subseteq \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ eine Funktionenfolge mit Grenzfunktion f , dann heißt f_n gleichmäßig konvergent auf D , wenn:

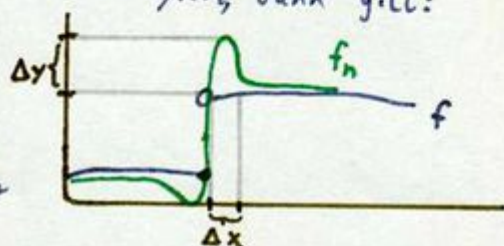
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| = 0 \iff \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N}, \text{ sodass } \forall n > N \text{ gilt: } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon; x \in D$$

- Wenn alle f_n stetig und f_n glm. gegen f konvergiert, dann ist f stetig.
 \hookrightarrow Ist f unstetig, aber alle f_n stetig, dann liegt keine gleichmäßige Konvergenz vor.
- Wenn alle f_n Riemann-integrierbar und f_n glm. gegen f konvergiert, dann gilt:

$$\int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x) dx = \int f(x) dx$$

- Aus glm. Konvergenz folgt Konvergenz.

Umgekehrt kann bei fehlender gleichmäßiger Konvergenz an einer Sprungstelle zwar Δx verschwinden, Δy aber nicht. Dies nennt man Gibbssches Phänomen.



Potenzreihen

Sei $a_n \in \mathbb{K}$ eine Folge; $x \in \mathbb{K}$; $x_0 \in \mathbb{K}$ der Entwicklungspunkt. Nun ist

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad \text{eine Potenzreihe. Potenzreihen sind auf den } \mathbb{K}^n \text{ und auf andere Räume verallgemeinerbar.}$$

- Potenzreihen konvergieren normal und absolut innerhalb eines Konvergenzradius

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sup(\sqrt[n]{|a_n|})} = \begin{pmatrix} \text{falls dieser Grenzwert existiert} \end{pmatrix} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad |x - x_0| < r$$

- Falls eine Potenzreihe innerhalb eines Radius gegen eine definierte Funktion f konvergiert, sodass $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, dann wird dieser Radius mit R bezeichnet.

- Identitätssatz für Potenzreihen: Seien $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ und $g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$ Potenzreihen mit Konvergenzradius $R \geq r > 0$. Stimmen f und g auf einer Umgebung $U_r(x_0)$ mit $r > \rho > 0$ (oder nur in unendlich vielen Punkten aus U) überein, so ist $a_n = b_n \forall n \in \mathbb{N}_0$ und somit $R = r$ und $f(x) = g(x) \forall x \in U$.

• Funktionen, die lokal durch Potenzreihen darstellbar sind, heißen analytisch.

Taylorreihen

Sei f_n $n+1$ mal stetig differenzierbar in x_0 , dann gilt in einem Konvergenzradius $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = T_n(x, x_0) + R_n(x, x_0) = \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) \cdot (x - x_0)^k}_{T_n} + \underbrace{\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \cdot (x - x_0)^{n+1}}_{R_n}$$

$$R_n(x, x_0) = f(x) - T_n(x, x_0)$$

- Die Taylorreihe konvergiert gegen f , wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x, x_0) = 0$ ist. Dabei gilt: $\exists \xi \in (x_0, x)$

$$\text{Alternativ lässt sich schreiben } R_n(x, x_0) = \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

\hookrightarrow Für höhere Dimensionen (\mathbb{R}^n): Sei $D \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ $n+1$ mal stetig partiell differenzierbar und sei $\vec{x}_0 + t \cdot \vec{h} \in D \forall t \in [0, 1]$. Nun ist

$$f(\vec{x}_0 + \vec{h}) = \underbrace{\sum_{|\alpha| \leq n} \frac{1}{\alpha!} (D^\alpha f(\vec{x}_0)) \cdot \vec{h}^\alpha}_{T_n} + \underbrace{\sum_{|\alpha| = n+1} \frac{(D^\alpha f(\vec{x}_0 + \tau \cdot \vec{h}))}{\alpha!} \cdot \vec{h}^\alpha}_{R_n}; \tau \in (0, 1)$$

Dabei ist α ein Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ mit Ordnung $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_m$, Fakultät $\alpha! = \alpha_1! \cdot \dots \cdot \alpha_m! = |\alpha|!$, Ableitungsoperator $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_m^{\alpha_m}}$ und Potenz $\vec{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_m^{\alpha_m}$. $|\alpha| = k$ bedeutet, dass man alle Kombinationen für α , die das erfüllen, durchgehen muss.

Für $n=2$ gilt:

$$T_2(\vec{h}, \vec{x}_0) = f(\vec{x}_0) + \langle \nabla f(\vec{x}_0), \vec{h} \rangle + \frac{1}{2} (\vec{h})^T \cdot (\text{Hess } f)_{(\vec{x}_0)} \cdot (\vec{h})$$

Laurentreihen Siehe auch Funktionentheorie / Isolierte Singularität
 Laurentreihen sind komplexe Reihen der Form

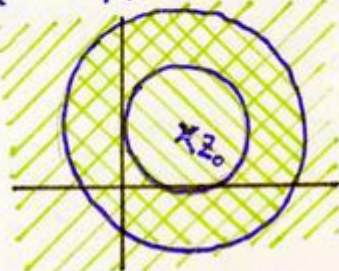
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z-z_0)^{-n}}_{\text{Hauptteil}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n}_{\text{Nebenteil}}$$

Der Nebenteil ist eine gewöhnliche Potenzreihe mit einem offenen, kreisförmigen Konvergenzgebiet $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-z_0| < R\}$. Der Hauptteil konvergiert außerhalb einer Kreisscheibe $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-z_0| > \frac{1}{\rho}\}$. Das gesamte Konvergenzgebiet ist also $D: \{z \in \mathbb{C} \mid \frac{1}{\rho} < |z-z_0| < R\}$.

• Sei $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ mit D wie oben holomorph auf D , so kann man f in eine eindeutig bestimmte Laurentreihe mit Entwicklungspunkt z_0 entwickeln, die auf jeder kompakten Teilmenge von D gleichmäßig gegen f konvergiert.

$\hookrightarrow a_n = \frac{1}{i2\pi} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} d\gamma$ mit γ als ein kreisförmiger Weg
 $\gamma: |z-z_0| = R; R \in (\frac{1}{\rho}, R); \gamma$ positiv orientiert

Konvergenz des Hauptteils
 Konvergenz des Nebenteils



Fourierreihen

Fourierreihen haben die Form $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(n \cdot x) + b_n \cdot \sin(n \cdot x))$

Sei $g(x)$ die (gewünschte) Grenzfunktion:

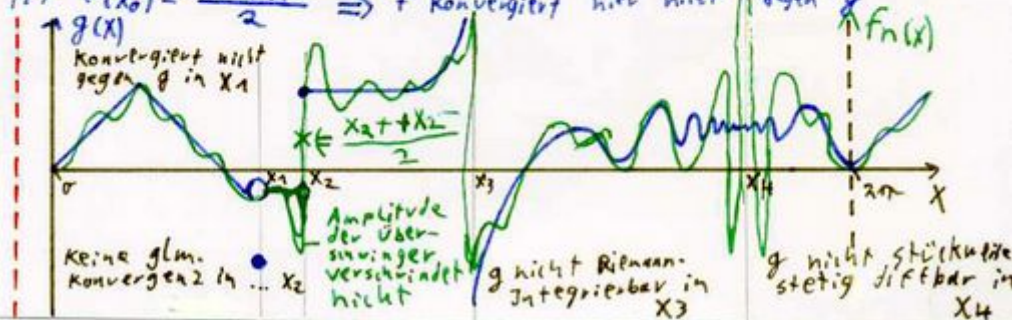
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(x) \cdot \cos(n \cdot x) dx; n \in \mathbb{N}_0 \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(x) \sin(n \cdot x) dx; n \in \mathbb{N}$$

- Konvergieren die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ absolut, dann konvergiert f glm. (gegen g) siehe vor
- ändert man g in endlich vielen Punkten ab, so bleibt f unverändert
- g und f sind 2π -periodisch.
- Ist g stückweise stetig differenzierbar auf $[0, 2\pi]$, dann konvergiert f (punktweise)
 $\forall x \in \mathbb{R}$. Seien x_+ und x_- der rechts- und linksseitige Grenzwert von g an einer Sprungstelle x_0 , dann ist $f(x_0) = \frac{x_+ + x_-}{2} \Rightarrow f$ konvergiert hier nicht gegen g

• Komplexe Schreibweise:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{i \cdot n \cdot x}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cdot e^{-i \cdot n \cdot x} dx$$



Polynominterpolation

Das Ziel einer Polynominterpolation ist es, ein Polynom zu finden, welches (oder dessen Ableitungen) an bestimmten Punkten bestimmte Werte annimmt. So können Wertepaare gebildet werden nach dem Schema $\left(x_i, y_i = p^{(m_i)}(x_i)\right)$, wobei (m_i) den Grad der Ableitung angibt. Damit eine Stützstelle der m -ten Ableitung hinzugenommen werden kann, müssen bereits m Stützstellen mit niedrigerer Ableitung gegeben sein, nur dann ist p vom Grad $\leq n$ und eindeutig bestimmt.


Das Polynom hat die Form $p(x) = a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_0 \cdot x^0$. Als elementarer Lösungsansatz können die x -Werte der Stützstellen in f bzw. dessen Ableitungen eingesetzt werden, die Koeffizienten $a_{n-1} \dots a_0$ als Vektor herausgezogen und das Ganze gleich dem Ergebnisvektor gesetzt werden: $M \cdot \vec{a} = \vec{b}$. Durch den **Gauss-Algorithmus** kann eine Lösung für a gefunden werden. Unter bestimmten Sonderfällen gibt es schnellere und numerisch genauere Verfahren:

- Die x -Position jeder Stützstelle ist gleich, es werden nur die Ableitungen variiert \rightarrow **Taylorreihe**
- Es werden nur Stützstellen der eigentlichen Funktion (keine Ableitungen) betrachtet \rightarrow **Lagrange-/Newtoninterpolation**

Lagrangeinterpolation

Die Lagrangeinterpolation ist ein leicht verständliches Verfahren, das jedoch rechnerisch nicht sehr schnell ist.

$$p(x) = \sum_{i=0}^n y_i \cdot L_{i,n}(x) \quad \text{mit} \quad L_{i,n}(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad \text{dabei gilt} \quad L_{i,n}(x_k) = \delta_{i,k} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i=k \\ 0 & \text{falls } i \neq k \end{cases}$$

 **Kronecker-Symbol**

Aus dieser Darstellung wird ersichtlich, dass p (oder genauer a_i) linear von y_i abhängt.

Newtoninterpolation

Für die Newtonsche Interpolationsformel wird p dargestellt als $p(x) = y_0 + y_1 \cdot (x - x_0) + y_2 \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) + \dots$

An der Stelle x_0 ist $p = y_0 \rightarrow y_0 = y_0$. Die übrigen y können durch Auswertung an den Stützstellen so ebenfalls iterativ bestimmt werden:

werden: $y_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \quad y_2 = \frac{y_2 - y_0 - y_1 \cdot (x_2 - x_0)}{(x_2 - x_1) \cdot (x_2 - x_1)} = \frac{\frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} \dots$

Man schreibt nun $y_i = f[x_0, x_1, \dots, x_i]$, mit $f[x_0, \dots, x_i]$ als *i-te dividierte Differenz zu den Stützstellen x_0, \dots, x_i* , wobei $f[x_k] = y_k$ ist.

Die dividierten Differenzen ermöglichen eine besonders effiziente Berechnung der y :

$$\begin{array}{l} x_0 \left| \begin{array}{l} f[x_0] = y_0 \\ f[x_1] = y_1 \\ f[x_2] = y_2 \end{array} \right. \begin{array}{l} \nearrow f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} \\ \searrow f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1} \end{array} \end{array}$$
$$\begin{array}{l} \nearrow f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} \end{array}$$

Innerhalb der Newtonschen Darstellung können jeder Zeit zusätzliche Stützstellen hinzugefügt werden. So erfordert das Hinzufügen einer $n+1$ -ten Stützstelle nur die Berechnung von $n+1$ neuen, dividierten Differenzen.

Die Schwierigkeit bei der Newtoninterpolation liegt im Ausmultiplizieren der *Newtonschen Darstellung* zu einem normalen Polynom.

Approximation einer Funktion auf einem Intervall

Eine Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ soll durch ein Polynom an den Stützstellen $(x_0, y_0 = f(x_0)), \dots, (x_n, y_n = f(x_n))$ interpoliert werden. Sei f $n+1$ mal stetig differenzierbar, $x_0, \dots, x_n \in [a, b]$ verschiedene Punkte und p das Polynom durch diese Stützstellen, dann existiert zu jedem $x \in [a, b]$ ein $\xi_x \in [a, b]$ mit $f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \cdot \omega(x)$ mit dem *Knotenpolynom* $\omega(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$. Daraus folgt:

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - p(x)| \leq \max_{x \in [a, b]} \frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!} \cdot \max_{x \in [a, b]} |\omega(x)| \leq \max_{x \in [a, b]} \frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!} \cdot (b-a)^{n+1}$$

Im Allgemeinen ist nicht sicher, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x) - p(x) = 0$

Чебышёв-Abzissen

Hierbei werden die Stützstellen auf $x_i = \frac{b-a}{2} \cdot \cos\left(\frac{2i+1}{n+1} \cdot \frac{\pi}{2}\right) + \frac{b+a}{2}$ gelegt. Dadurch wird der maximale Wert des

Knotenpolynoms minimiert: $\max_{x \in [a, b]} |\omega(x)| = \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1} \cdot 2^{-n}$

Approximation einer Umkehrfunktion auf einem Intervall

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bijektiv und $(x_0, y_0 = f(x_0)), \dots, (x_n, y_n = f(x_n))$ verschiedene Stützstellen von f auf $[a, b]$, dann kann f^{-1} durch Interpolation der Stützstellen $(y_0, x_0), \dots, (y_n, x_n)$ approximiert werden.

Splineinterpolation

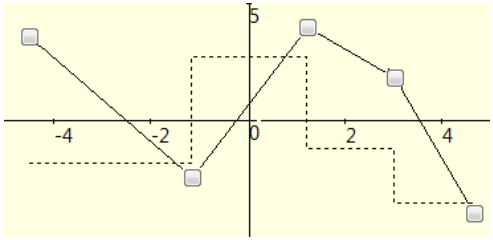
Da eine Interpolation mit einem (unendlich oft differenzierbaren) Polynom bei mehr als ~5 Punkten zu starkem Überschwingen führt, versucht man bei der Splineinterpolation das Gesamtintervall in viele kleine Intervalle zu zerlegen, an deren Grenzen (Stützstellen) die interpolierende Funktion nur endlich oft (stetig) differenzierbar ist. Im Folgenden sind die Stützstellen sortiert, also $x_{i+1} > x_i$.

Lineare Splines

Bei linearen Splines werden die Punkte mit einfachen Geraden verbunden. Die Funktion ist also stetig, aber nicht glatt bzw. stetig differenzierbar. Zu einer Menge an Stützpunkten existiert genau ein interpolierender, linearer Spline $s(x)$.

Fehlerabschätzung:

Seien die Stützpunkte die Funktionswerte einer zwei mal stetig differenzierbaren



Funktion $f(x)$, dann gilt:
$$\max_{x \in [a,b]} |f(x) - s(x)| \leq \frac{1}{8} \cdot \max_{x \in [a,b]} |f''(x)| \cdot h_{\max}^2 \quad \text{mit} \quad h_{\max} = \max_{i=0, \dots, n-1} x_{i+1} - x_i$$

Kubische C²-Splines

Bei kubischen Splines werden je zwei Punkte durch ein Polynom dritten Grades verbunden. Bei C²-Splines wird dieses Polynom so gewählt, dass das Spline an den Stützstellen 2 mal stetig differenzierbar ist. Dadurch wirkt sich die Verschiebung einer Stützstelle global, auf das gesamte Spline aus.

Berechnung:

Die Teilpolynome werden dargestellt in folgender Form:

$$s_i(x) = \frac{1}{6} \left(\frac{(x_{i+1} - x)^3}{x_{i+1} - x_i} \cdot M_i + \frac{(x - x_i)^3}{x_{i+1} - x_i} \cdot M_{i+1} \right) + c_i \cdot (x - x_i) + d_i$$
 Diese entsteht durch zweifache Integration einer linearen Funktion (grob gestrichelte Linie im Bild). c_i und d_i ergeben sich aus der Stetigkeit $s_i(x_i) = s_{i-1}(x_i) = y_i$:

$$d_i = y_i - \frac{h_i^2}{6} \cdot M_i \quad c_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{h_i}{6} \cdot (M_{i+1} - M_i) \quad \text{mit} \quad h_i = x_{i+1} - x_i$$
 Die sg. Momente M_i lassen sich aus folgendem System berechnen:

$$\begin{pmatrix} \mu_0 & \lambda_0 & & & \\ \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & \frac{h_{i-1}}{6} & \frac{h_{i-1} + h_i}{3} & \frac{h_i}{6} & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \lambda_n & \mu_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} M_0 \\ \vdots \\ M_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad | \quad i=1 \dots n-1$$
 Diese Matrix ist strikt diagonaldominant und daher unter den angenommenen Bedingungen invertierbar (lösbar). Benötigt werden in der ersten - und letzten Zeile außerdem die Randbedingungen.

Typische Randbedingungen:

- Natürliche Randbedingungen: $s''(a) = s''(b) = 0 \rightarrow b_0 = b_n = \lambda_0 = \lambda_n = 0 \quad \mu_0 = \mu_n = 1$
- Hermite-Randbedingungen: $s'(a) = f'(a) \quad s'(b) = f'(b) \rightarrow \mu_0 = \frac{h_0}{3} \quad \lambda_0 = \frac{h_0}{6} \quad b_0 = \frac{y_1 - y_0}{h_0} - f'(a)$

Minimalitätseigenschaften:

Sei $s(x)$ das kubische Spline (natürliche oder Hermite-RB) durch die Stützstellen (x_i, y_i) , und $g(x)$ eine beliebige, zwei mal stetig differenzierbare Funktion durch die selben Stützstellen, dann gilt:

$$\int_a^b f''(x)^2 dx = \int_a^b s''(x)^2 dx + \int_a^b (f''(x) - s''(x))^2 dx \geq \int_a^b s''(x)^2 dx$$

Fehlerabschätzung:

Seien die Stützpunkte die Funktionswerte einer vier mal stetig differenzierbaren Funktion $f(x)$, dann gilt:

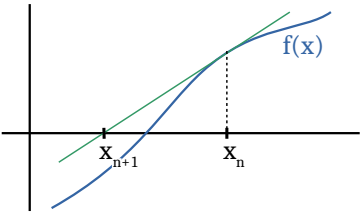
$$|f^{(k)}(x) - s^{(k)}(x)| \leq t \cdot \sup_{\xi \in [a,b]} |f^{(4)}(\xi)| \cdot h_{\max}^{4-k} \quad \text{mit} \quad k = \{0, 1, 2\} \quad , \quad t = \begin{cases} \frac{2 \cdot h_{\max}}{h_{\min}} & \text{für } k \neq 0 \\ \frac{h_{\max}}{h_{\min}} & \text{für } k=0 \text{ und natürliche RB} \\ \frac{5}{384} & \text{für } k=0 \text{ und Hermite-RB} \end{cases}$$

Newtonverfahren

Das Newtonverfahren dient zur Approximation von Nullstellen. Das Verfahren arbeitet iterativ, ausgehend von einem Punkt x_n wird ein Punkt $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ berechnet.

Man könnte auch sagen: Man approximiert f im Punkt x_n durch ein Taylorpolynom 1. Grades und berechnet dessen Nullstelle. So kann das Verfahren verallgemeinert werden: Sei $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und $\vec{F}(\vec{x}) = \vec{0}$, dann existiert eine Umgebung (Kugel)

$B_\delta = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \| \vec{x} - \vec{x}^* \| < \delta \}$ mit $\delta > 0$, in der das Newtonverfahren für alle Ausgangspunkte $x \in B_\delta$ gegen \vec{x}^* konvergiert. Innerhalb von B_δ ist \vec{x}^* die einzige Nullstelle. Für streng monotone Funktionen lässt sich das Newtonverfahren globalisieren, sodass es für alle $x \in \mathbb{R}^n$ konvergiert. Ein *Newtonschritt* s berechnet sich aus $J_F(\vec{x}_n) \cdot \vec{s} = -\vec{F}(\vec{x}_n)$, mit Jakobimatrix J_F . Somit gilt $\vec{s} = -J_F^{-1}(\vec{x}_n) \cdot \vec{F}(\vec{x}_n)$, eine Lösung mittels Gauss-Algorithmus ist jedoch meist schneller, als die Berechnung der inversen Matrix. Der Iterationsschritt lautet nun $\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n + \sigma \cdot \vec{s}$, wobei für σ nach *Schrittweitenwahl nach Amijo* im globalisierten Fall der größtmögliche Wert aus der Folge $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots\right)$ gewählt wird, sodass gilt $\| \vec{F}(\vec{x}_n + \sigma \cdot \vec{s}) \|^2 \leq \| \vec{F}(\vec{x}_n) \|^2 \cdot (1 - 2\delta\sigma)$; $\delta \in (0, 0.5)$ ist hier ein fest definierter Wert (z.B. 0.001), der sicherstellt, dass der Betrag der Funktion in jedem Schritt um ein Mindestmaß abnimmt.



Grenzwerte und Stetigkeit

Stetigkeit

Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt stetig in ξ , wenn $\forall \epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass $\forall x \in D; |\xi - x| < \delta$ auch $|f(\xi) - f(x)| < \epsilon$ ist.

\Rightarrow Sei $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \xi$ eine beliebige Folge, die gegen ξ konvergiert, dann muss gelten $\lim_{k \rightarrow \infty} f(a_k) = f(\xi)$ (außer, wenn ξ ein isolierter Punkt ist)

• wenn D eine diskrete Menge ist, dann ist f stetig (unabh. des Zielraumes)

• Seien $f: D \rightarrow E$ und g stetige Funktionen:

\Rightarrow wenn D kompakt ist, ist auch E kompakt \Rightarrow wenn D (weg) zusammenhängend ist, ist auch E (weg) zusammenhängend

$\Rightarrow f \circ g$ ist stetig $\Rightarrow f \pm g$ ist stetig $\Rightarrow f \cdot g$ ist stetig

$\Rightarrow f/g$ ist stetig (für $g=0$ existieren Definitionslücken)

\Rightarrow Sei ξ nicht Element aus D , jedoch ein Häufungspunkt von f und es existiere der beidseitige Grenzwert $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x)$, dann ist f stetig ergänzbar in ξ .

Gleichmäßige Stetigkeit

f heißt gleichmäßig stetig, wenn $\forall \epsilon > 0$ ein δ existiert, sodass $\forall \xi, x \in D; |\xi - x| < \delta$ gilt: $|f(\xi) - f(x)| < \epsilon$

• Sei D eine kompakte Menge und f stetig, dann ist f auch gleichmäßig stetig.

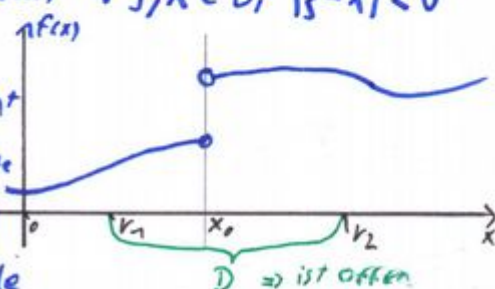
• gleichmäßig stetige Fkt. sind stetig.

• Sei $D \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$\Rightarrow f$ ist hier stetig auf D , jedoch nicht gleichmäßig stetig

$\Rightarrow D$ ist keine kompakte Menge (D ist offen)

$D = [r_1, x_0) \cup (x_0, r_2]$



Stückweise Stetigkeit

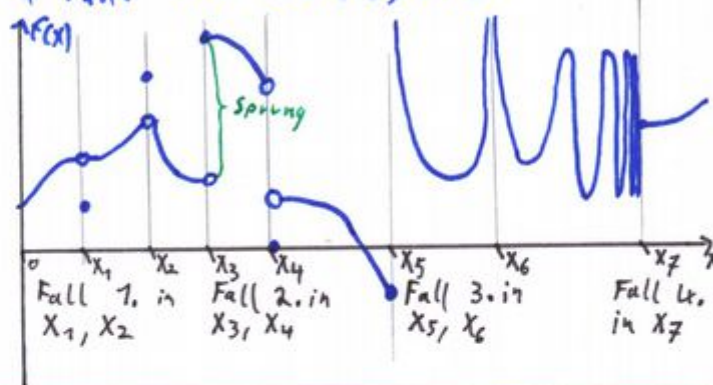
f heißt stückweise stetig auf D , wenn f nur endlich viele Unstetigkeitsstellen x_i auf D besitzt und $\forall x_i$ der rechtsseitige und der linksseitige Grenzwert existiert.

\Rightarrow Alle x_i müssen von 1. Art sein.

Unstetigkeitsstelle

Seien $f(x_0-) = \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$ und $f(x_0+) = \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)$ der links- und rechtsseitige Grenzwert an x_0 , dann heißt f unstetig in x_0 , falls folgende Bedingung nicht erfüllt ist: $f(x_0-) = f(x_0+) = f(x_0)$. Man unterscheidet 4 Fälle von Unstetigkeit:

- 1: $f(x_0-) = f(x_0+)$ existieren. Dies ist eine behebbare Unstetigkeit.
- 2: $f(x_0-) \neq f(x_0+)$ existieren. Dies ist eine Sprungstelle und $s = f(x_0+) - f(x_0-)$ der Sprung von f in x_0 .
- 3: Mind. einer der Grenzwerte existiert nur uneigentlich ($= \pm \infty$). Dies ist eine Polstelle.
- 4: Mind. einer der Grenzwerte existiert weder eigentlich noch uneigentlich.



L'Hôpital-Regel

Sei x_0 ein Grenzwert einer Funktion $\frac{f(x)}{g(x)}$ und seien $f(x)$ und $g(x)$ in einer Umgebung um x_0 differenzierbar und $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ und $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, dann gilt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

• gilt auch für x_0 uneigentlich ($\pm \infty$)

• gilt auch für $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$

• $\lim_{x \rightarrow x_0}$ kann überall mit $\lim_{x \rightarrow x_0}$ ersetzt werden.

Lipschitzstetigkeit

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$, dann ist $f: M \rightarrow \mathbb{R}^m$ Lipschitzstetig auf M , wenn ein L existiert, sodass

$$\|f(\vec{x}) - f(\vec{y})\| \leq L \cdot \|\vec{x} - \vec{y}\| \quad \forall x, y \in M.$$

\Rightarrow Die Steigung darf einen bestimmten Wert nicht übersteigen.

• Lipschitzstetige Funktionen sind stetig.

Differential- & Integralrechnung

Differential & Differenzierbarkeit

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \Rightarrow f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Existiert dieser Grenzwert, so ist f in x_0 differenzierbar und $f'(x_0)$ ist die Ableitung in x_0 .

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \Rightarrow f(\vec{x}_0 + \vec{h}) = f(\vec{x}_0) + A \cdot \vec{h} + o(\|\vec{h}\|) \quad \text{für } \vec{h} \rightarrow 0$$

$$f'(\vec{x}_0) = A_{(m \times n)}$$

$\lim_{\vec{h} \rightarrow 0} r(\vec{h}) = 0$ \leftarrow muss erfüllt sein, für diffbar.

Existiert eine Matrix A , sowie eine, in einer Umgebung U um x_0 definierte Funktion r , und die Bedingung ist erfüllt $\forall \vec{h} \in U$, dann ist f diffbar in x_0 und A ist die Jakobimatrix von f an der Stelle x_0 .

Beziehungen:

$f(x)$ stetig partiell differenzierbar $\Rightarrow f$ (total) differenzierbar $\Rightarrow f$ partiell differenzierbar

\Downarrow
 f stetig

für $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

Partielle Ableitungen $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

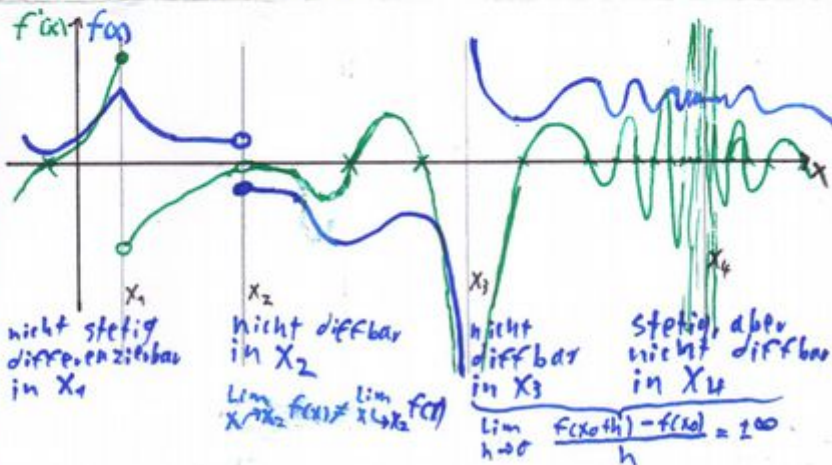
$$\frac{\partial f}{\partial x_i} := f_{x_i} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \quad \text{2. Ableitung nach } x_i$$

Für die partielle Ableitung kann f als Funktion von $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ betrachtet werden, die nur von x_i abhängt.

• Sei f 1x total differenzierbar auf U und die Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existiert und ist stetig in \vec{a} , dann gilt:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\vec{a}) \quad \text{mit} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial f_{x_j}}{\partial x_i}$$

\Rightarrow Ableitungen sind vertauschbar!



Jakobi-Matrix
 $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \Rightarrow J_f(\vec{a}) = \begin{pmatrix} f_{x_1}(\vec{a}) \\ \vdots \\ f_{x_n}(\vec{a}) \end{pmatrix}; \vec{a} \in U; f \text{ partiell differenzierbar } \forall x_i$

$$J_f(\vec{a}) := \frac{\partial f}{\partial \vec{x}}(\vec{a}) := \frac{\partial (f_1 \dots f_m)}{\partial (x_1 \dots x_n)}(\vec{a}) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{a}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{a}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{a}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\vec{a}) \end{pmatrix}$$

\downarrow
Jakobimatrix von f an der Stelle \vec{a}
wird auch "totale Ableitung" genannt.

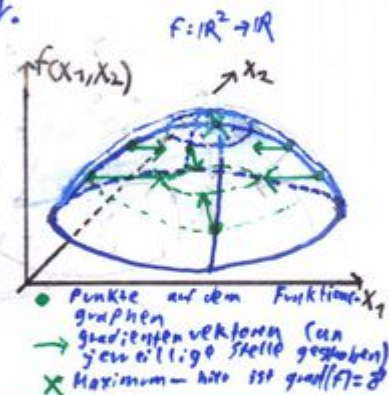
Gradient

Im Fall $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist $J_f(\vec{a})$ ein transponierter Vektor.

$$\text{grad}(f) = \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

im Fall kartesischer Koordinaten auch:
 $\text{grad}(f) = \nabla f$

Der Gradient ist ein Vektor, der in Richtung des steilsten Anstiegs zeigt. Der Betrag dieses Vektors ist die Steigung in diese Richtung.

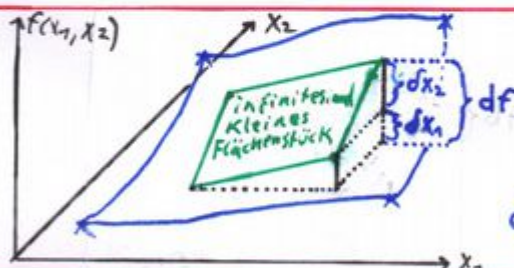


Totales Differential

$f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

Das totale Differential ist die Summe aller partieller Ableitungen



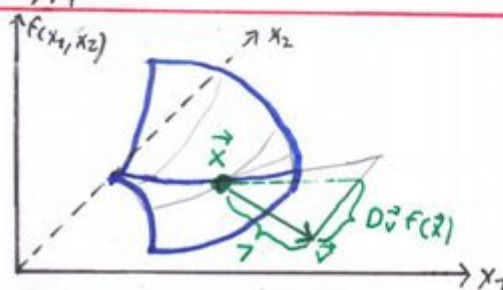
$$df = \langle \text{grad}(f), \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

Richtungsableitungen

$f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}; \vec{x} \in U; \vec{v} \in \mathbb{R}^n; \|\vec{v}\| = 1$

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial \vec{v}} = \langle \text{grad}(f)(\vec{x}), \vec{v} \rangle = D_{\vec{v}} f(\vec{x})$$

Die Richtungsableitung liefert die Steigung einer Funktion in einem Punkt \vec{x} in Richtung des normierten Vektors \vec{v} .

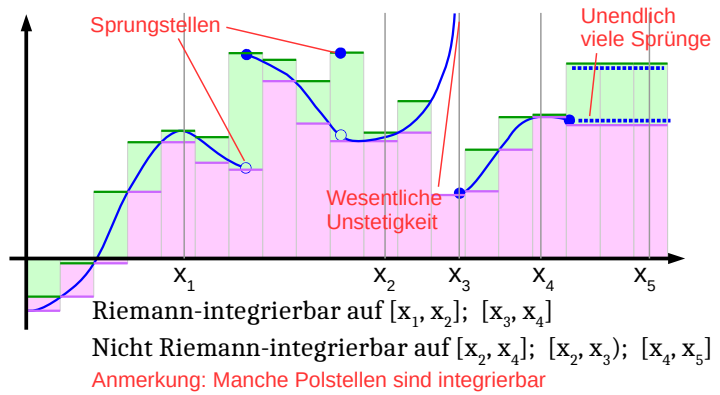


Riemann-Integral

Sei I : [a, b] ein geschlossenes Intervall und f : I → ℝ. Nun ist a < x_0 < ... < x_n < b eine Zerlegung Z des Intervalls. Es gilt:

U(z, f) = sum_{k=1}^n (X_k - x_{k-1}) · inf { f(x); x ∈ [k_{k-1}, k_k] }

O(z, f) = sum_{k=1}^n (X_k - x_{k-1}) · sup { f(x); x ∈ [k_{k-1}, k_k] }



f heißt nun Riemann-integrierbar auf [a, b], wenn U(z, f) und O(z, f) existieren und:

lim_{n → ∞} U(z, f) = lim_{n → ∞} O(z, f) := ∫_a^b f(x) dx Ohne die Angabe von Grenzen F(x) = ∫ f(x) dx heißt F eine Stammfunktion von f.

- Ist F(x) eine Stammfunktion von f(x), so ist auch F(x) + c eine Stammfunktion von f(x).
- Eine beschränkte Funktion f : [a, b] → ℝ ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn es zu jedem ε > 0 eine Zerlegung z gibt, sodass O(z, f) - U(z, f) < ε
- ndert man f in endlich vielen Punkten ab, so bleibt ∫_a^b f(x) dx unverändert.
- Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:**

∫_a^b f(x) dx = ∫_{[a, b]} f(x) dx = F(x) |_a^b = F(b) - F(a) = - ∫_b^a f(x) dx d/dx ∫ f(x) dx = f(x)

- Existiert der Grenzwert lim_{b → ∞} ∫_a^b f(x) dx = ∫_a^∞ f(x) dx, so heißt dies uneigentliches Integral (Gleiches gilt für untere Grenze).

Numerische Integration

Die meisten numerischen Integrationsverfahren basieren auf dem Ansatz, die Funktion (stückweise) durch Polynome zu interpolieren und diese zu integrieren.

Geschlossene Newton-Cotes-Quadratur

Ein Intervall [a, b] wird dafür in äquidistante Stützstellen x_0, ..., x_n mit x_i = a + i · h und Abstand h = (b-a)/n zerlegt.

In Lagrangeinterpolation lautet das Integral:

∫_a^b f(x) dx ≈ ∫_a^b p_{[a, b]}(x) dx = ∫_a^{a+n·h} sum_{i=0}^n f(x_i) · L_{i, n}(x) dx ≡ h · ∫_0^n f(a+i·h) · ∏_{j=0, j≠i}^n ((a+s·h)-(a+j·h))/((a+i·h)-(a+j·h)) dx = h · sum_{i=0}^n a_{i, n} · f(a+i·h)

Durch die Substitution x = a + s · h wird das Integrationsintervall von [a, b] auf [0, n] verschoben, die Werte a_{i, n} = ∫_0^n ∏_{j=0, j≠i}^n (s-j)/(i-j) ds (auch Gewichte) mit i = 0, ..., n werden somit von den Grenzen unabhängig und können tabelliert werden:

n	Stützstellen	a_{i, n}	max. Fehler	Name
1	0 1	1/2 1/2	-(b-a)^3/12 · f''(ξ)	Trapezregel
2	0 1/2 1	1/6 4/6 1/6	-(b-a)^5/2880 · f^{(4)}(ξ)	Simpson- / Keplersche Fassregel
3	0 1/3 2/3 1	1/8 3/8 3/8 1/8	-3 · (b-a)^5/19440 · f^{(4)}(ξ)	3/8-Regel / Pulcherrima
4	0 1/4 2/4 3/4 1	7/90 32/90 12/90 32/90 7/90	-8 · (b-a)^7/15482880 · f^{(6)}(ξ)	Milne- / Boole-Regel
5	0 1/5 2/5 3/5 4/5 1	19/288 75/288 50/288 50/288 75/288 19/288	-275 · (b-a)^7/945000000 · f^{(6)}(ξ)	6-Punkt-Regel
6	0 1/6 2/6 3/6 4/6 5/6 1	41/840 216/840 27/840 272/840 27/840 216/840 41/840	-9 · (b-a)^9/14108774400 · f^{(8)}(ξ)	Weddle-Regel

Es gilt: a_{i, n} = a_{n-i, n}

Es existiert ein ξ ∈ [a, b], sodass:

∫_a^b f(x) dx - ∫_a^b p(x) dx ≤ |f^{(n+1)}(ξ)| / (n+1)! · (b-a)^{n+2}

Der rechte Term ist in der Tabelle vereinfacht aufgefhrt. Für obere Grenze max_{ξ ∈ [a, b]} |f^{(n+1)}(ξ)| bestimmen!

Summierte Newton-Cotes-Quadratur

Die Newton-Cotes-Quadraturen sind nur dann genau, wenn f auf [a, b] nicht zu stark schwingt. Andernfalls ist es besser, [a, b] zunächst in Teilintervalle zu zerlegen und diese Teilintervalle dann per Newton-Cotes-Quadratur zu integrieren. Man schreibt:

∫_a^b f(x) dx ≈ h · sum_{j=0}^{m-1} sum_{i=0}^n α_{1, n} · f(x_{jn+i})

Integration im \mathbb{R}^n

Sei $\vec{x} \in I_x \subseteq \mathbb{R}^n$ $\vec{y} \in I_y \subseteq \mathbb{R}^m$ $I = I_x \times I_y \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$

- $\Rightarrow f(x) = \int f(x) dx$ nur für $f(x) = 0$
- \Rightarrow Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von f , so ist auch $F(x) + c$ eine Stammfunktion. sind integrierbar z.B. $\frac{1}{x^2}, x > 0$
- \Rightarrow Zwei Stammfunktionen unterscheiden sich nur durch eine Konstante
- $\Rightarrow \frac{d}{dx} \int f(x) dx = f(x)$ Siehe auch Vertauschen von Integral und Differenzial $\Rightarrow \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = \int_{[a,b]} f(x) dx = F(x) \Big|_a^b$
- \Rightarrow Eine beschränkte Funktion $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung Z gibt, sodass $O(Z, f) - U(Z, f) < \varepsilon$.

Uneigentliches Integral
Existiert der Grenzwert $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx = \int_a^\infty f(x) dx$, so heißt dies uneigentliches Integral.
Selbiges gilt auch für untere Grenze. Siehe auch: Folgen und Reihen + gleichmäßige Konvergenz

Integrale im \mathbb{R}^n

Sei $J = J_x \times J_y \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ und $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-Integrierbar.

• Wenn $\forall y \in J_y$ die Funktion $g(x) = \int_{J_x} f(\vec{x}, \vec{y}) dx$ Riemann-integrierbar

$$\int_J f(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{x} d\vec{y} = \int_{J_y} \left(\int_{J_x} f(\vec{x}, \vec{y}) dx \right) d\vec{y} = \int_{J_x} \left(\int_{J_y} f(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{y} \right) d\vec{x}$$

Beide Funktionen g und h sind R. Intbar.

• Wenn $\forall x \in J_x$ die Funktion $h(x) = \int_{J_y} f(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{y}$ Riemann-integrierbar

\Rightarrow Aus der R. Integrierbarkeit von f auf J_x und J_y folgt nicht die R. Integrierbarkeit von f auf J

\Rightarrow Ist f stetig auf J , dann ist f auch R. integrierbar auf J , J_x und J_y und $g(x)$ und $h(x)$ sind ebenfalls Riemann-integrierbar.

Auf beliebigen Mengen: Sei $M \subseteq J \subseteq \mathbb{R}^n$. $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ ist Riemann-Integrierbar, wenn die Fortsetzung $f_M: J \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-Integrierbar ist.

$$\int_M f(\vec{x}) d\vec{x} = \int_J f_M(\vec{x}) d\vec{x} = \int_J f(\vec{x}) \cdot \chi_M d\vec{x}$$

\Rightarrow Wenn f auf J Riemann-Integrierbar und M Jordan-messbar, dann ist f auf M Riemann-integrierbar.

\Rightarrow Sei M als Normalbereich gegeben ($M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; a \leq x \leq b; g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$) dann ist

$$\int_M f(x, y) d(x, y) = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

$$\Rightarrow \left| \int_M f(x) dx \right| \leq \sup_{x \in M} |f(x)| \cdot \mu(M) \Rightarrow \int_A f(x) dx + \int_B f(x) dx = \int_{A \cup B} f(x) dx + \int_{A \cap B} f(x) dx$$

Extremwerte

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar.
 Wenn gilt: $(\text{grad } f)(\vec{x}_0) = \vec{0}$, so ist \vec{x}_0 ein stationärer Punkt. Stationäre Punkte, die keine Extremwerte sind, heißen Sattelpunkte.

\vec{x}_0 ist genau dann ein Sattelpunkt, wenn:
 $\hookrightarrow n=1: f'(\vec{x}_0) = \dots = f^{i-1}(\vec{x}_0) = 0; f^i(\vec{x}_0) \neq 0; i \bmod 2 \neq 0 \Leftrightarrow$ Wenn der Index i der Ableitung, die nicht mehr 0 ist, ungerade ist. f^1, \dots, f^i müssen stetig in \vec{x}_0 sein!
 $\hookrightarrow n > 1: (\text{Hess } f)(\vec{x}_0)$ ist hermitesch und indefinit.

\vec{x}_0 ist genau dann ein Extremwert, wenn:
 $\hookrightarrow n=1: f'(\vec{x}_0) = \dots = f^{i-1}(\vec{x}_0) = 0; f^i(\vec{x}_0) \neq 0; i \bmod 2 = 0 \Leftrightarrow$ Wenn der Index der Ableitung, die nicht mehr 0 ist, gerade ist. f^1, \dots, f^i müssen stetig in \vec{x}_0 sein!
 \hookrightarrow Maximum, wenn $f^i(\vec{x}_0) < 0$ \hookrightarrow Minimum, wenn $f^i(\vec{x}_0) > 0$
 $\hookrightarrow n > 1: (\text{Hess } f)(\vec{x}_0)$ ist hermitesch und positiv oder negativ definit.
 \hookrightarrow Maximum, wenn Hess f negativ def. \hookrightarrow Minimum, wenn Hess f positiv def.

Ist von f^1, \dots, f^i eine Ableitung unstetig in \vec{x}_0 bzw. $(\text{Hess } f)(\vec{x}_0)$ nicht hermitesch (symmetrisch), so ist keine Aussage möglich!
 Ist bei $n > 1$ $(\text{Hess } f)(\vec{x}_0)$ positiv oder negativ semidefinit, so ist ebenfalls keine Aussage möglich. Man müsste dann, wie bei $n=1$, weitere Ableitungen untersuchen.

\hookrightarrow Globale/Lokale Extremwerte: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n; f: D \rightarrow \mathbb{R}$, dann hat f an der Stelle \vec{x}_0 ein globales Maximum, wenn $f(\vec{x}_0) \geq f(\vec{x}); \vec{x} \in D$. f hat ein lokales Maximum in \vec{x}_0 , wenn eine offene Umgebung U existiert, sodass $f(\vec{x}_0) \geq f(\vec{x}); \vec{x} \in U \subseteq D$.
 Für Minima gilt das gleiche, nur mit \leq .

Extremwerte unter Nebenbedingungen

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n; f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig partiell differenzierbare Funktion, deren Bildmenge auf \mathbb{R} Extremwerte untersucht werden soll. Nun seien S implizite, stetig partiell differenzierbare Funktionen $g_1, \dots, g_s: D \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben, sodass: $(\text{grad } f)(\vec{x}) = \vec{0}; g_k(\vec{x}) = 0 \forall k=1, \dots, s; \vec{x} \in D$.
 Die Gradienten von g_1, \dots, g_s müssen linear unabhängig sein.

Nun gilt: $\Psi(\vec{x}, \vec{\lambda}) = f(\vec{x}) + \sum_{k=1}^s \lambda_k \cdot g_k(\vec{x})$ $(\text{grad } g_i)(\vec{x}_0) = \vec{0}$ und seien nun noch die Gradienten $\text{grad } g_1, \dots, \text{grad } g_s \neq \vec{0}$, so gilt: $\vec{g}(\vec{x}_0) = \vec{0}$, so muss \vec{x}_0 zur Menge der stationären Punkte hinzugefügt werden. Das System unten ist für \vec{x}_0 mögl.weise nicht lösbar.
 $\bullet \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial \Psi}{\partial x_n} = 0 \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_1} = \dots = \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_s} = 0$
 $\bullet \Psi$ heißt Lagrange-Funktion und λ_k sind die Lagrange-Multiplikatoren.

Die Ableitung von Ψ liefert ein System aus $n+s$ Gleichungen:

$$(D\Psi)^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \Psi}{\partial x_n} \\ 0 + g_1'(\vec{x}) \\ \vdots \\ 0 + g_s'(\vec{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \dots + \lambda_s \frac{\partial g_s}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_n} + \dots + \lambda_s \frac{\partial g_s}{\partial x_n} \\ \text{Bei } \frac{\partial(\lambda_k \cdot g_k)}{\partial \lambda_k} \\ \text{fällt alles weg, wenn } a \neq b \\ \text{und es bleibt nur } a \text{ bei } a=b, \text{ da } g \text{ nicht von } \lambda \text{ abhängt.} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

 Nun sind für den oberen Teil des Systems die Lösungen $x_1(\vec{\lambda}), \dots, x_n(\vec{\lambda})$ zu bestimmen und in den unteren Teil einzusetzen.
 Die Lösungsmenge des unteren Teils ist nun die Menge aller stationären Punkte unter der Nebenbedingung g .

\hookrightarrow Berechnung mittels Umkehrfunktion:
 Ist g invertierbar, so kann g auch nach einem x_k aufgelöst und in f eingesetzt werden. Damit verschwindet die Nebenbedingung.

Hesse matrix

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$; $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ zwei mal differenzierbar, dann ist:

$$(\text{Hess } f)(\vec{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(\vec{x}) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\vec{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\vec{x}) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(\vec{x}) \end{pmatrix}; \quad i, j = 1, \dots, n$$

• Ist f 2 mal stetig differenzierbar, so gilt: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ und Hess f ist symmetrisch.

Kettenregel

Seien $A \subseteq \mathbb{R}^l$; $B \subseteq \mathbb{R}^m$; $C \subseteq \mathbb{R}^n$; $f: B \rightarrow C$ differenzierbar; $g: A \rightarrow B$ differenzierbar.

Nun ist: $H: A \rightarrow C$ $H = f \circ g$ ebenfalls differenzierbar und es gilt:

$$DH_{\vec{x}} = D(f \circ g)(\vec{x}) = Df(g(\vec{x})) \cdot Dg(\vec{x}) = J_f(g(\vec{x})) \cdot J_g(\vec{x}) \quad \boxed{\vec{x} \in A; g(\vec{x}) = \vec{y} \in B}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(g_1(\vec{x})) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m}(g_m(\vec{x})) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1}(g_1(\vec{x})) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial y_m}(g_m(\vec{x})) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\vec{x}) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_l}(\vec{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(\vec{x}) & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial x_l}(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

↳ Für \mathbb{R}^1 : $\frac{d}{dx} u(v(x)) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

Produktregel

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$; $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar; $\vec{x} \in D$; $\vec{v} \in D$; $|\vec{v}| = 1$

Nun gilt für die Richtungsableitung:

$$\frac{\partial}{\partial \vec{v}} (f \cdot g) = \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{x}) \cdot g(\vec{x}) + f(\vec{x}) \cdot \frac{\partial g}{\partial \vec{v}}(\vec{x}) = \langle \text{grad } f(\vec{x}), \vec{v} \rangle \cdot g(\vec{x}) + f(\vec{x}) \cdot \langle \text{grad } g(\vec{x}), \vec{v} \rangle$$

⇒ Die Produktregel gilt nur für partielle Ableitungen. Man kann das Produkt aus zwei Funktionen mit mehreren Variablen nicht getrennt voneinander ableiten und dann zusammensetzen!

↳ Für \mathbb{R}^1 : $\frac{d}{dx} u(x) \cdot v(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

Allgemeiner: $\frac{d}{dx} \prod_{k=1}^m f_k(x) = \sum_{l=1}^m f'_l(x) \cdot \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^m f_k(x)$

Produkt- und Kettenregel für Brüche im \mathbb{R}^1 : $\frac{d}{dx} \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v(x)^2}$

Rotation

$$\vec{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\text{rot}(\vec{F}(\vec{x})) = \lim_{|\Delta V| \rightarrow 0} \frac{\oint_{\partial(\Delta V)} (\vec{n} \times \vec{F}(\vec{x})) \, ds}{|\Delta V| \cdot \|\vec{n}\|}$$

• ΔV ist ein beliebiges Volumen in \mathbb{R}^3 ; $|\Delta V|$ sein Inhalt

• $\partial(\Delta V)$ ist der Rand (Oberfläche)

• ds ist ein infinitesimal kleines Flächenelement aus $\partial(\Delta V)$; \vec{n} der nach außen zeigende Normalenvektor von ds

Für kartesische Koordinaten:

$$\text{rot}(\vec{F}(\vec{x})) = \det \begin{pmatrix} 1 & \frac{\partial}{\partial x_1} & F_1(\vec{x}) \\ 1 & \frac{\partial}{\partial x_2} & F_2(\vec{x}) \\ 1 & \frac{\partial}{\partial x_3} & F_3(\vec{x}) \end{pmatrix} = \nabla \times \vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial x_2}(\vec{x}) - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}(\vec{x}) \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_3}(\vec{x}) - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}(\vec{x}) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(\vec{x}) - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

• rot ist linear

$$\hookrightarrow \text{rot}(c \cdot \vec{F}(\vec{x})) = c \cdot \text{rot}(\vec{F}(\vec{x}))$$

$$\hookrightarrow \text{rot}(\vec{F}(\vec{x}) + \vec{G}(\vec{x})) = \text{rot}(\vec{F}(\vec{x})) + \text{rot}(\vec{G}(\vec{x}))$$

$$\bullet \text{rot}(u_{\text{rot}} \vec{F}(\vec{x})) = u(\vec{x}) \cdot \text{rot}(\vec{F}(\vec{x})) + \text{grad}(u(\vec{x})) \times \vec{F}(\vec{x})$$

$$\bullet \text{rot}(\text{rot}(\vec{F}(\vec{x}))) = \text{grad}(\text{div}(\vec{F}(\vec{x}))) - \Delta \vec{F}(\vec{x})$$

↳ Laplace-Operator

$$\bullet \text{rot}(\text{grad}(u(\vec{x}))) = 0$$

$$\bullet \text{div}(\text{rot}(\vec{F}(\vec{x}))) = 0$$

↳ Im \mathbb{R}^2 :

Ein zweidimensionales Vektorfeld $E: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ kann hier als 3D-Vektorfeld aufgefasst werden, dessen 3. Komponente 0 ist:

$$E(x_1, x_2) := \begin{pmatrix} E_1(x_1, x_2) \\ E_2(x_1, x_2) \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rot}(E) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial E_2}{\partial x_1} - \frac{\partial E_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} := \frac{\partial E_2}{\partial x_1}(x_1, x_2) - \frac{\partial E_1}{\partial x_2}(x_1, x_2)$$

Vertauschen von Integral und Differenzial

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen; $[a, b] \times [c, d] \subseteq U$; $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar nach y ; $g: [c, d] \rightarrow [a, b]$ stetig differenzierbar; $\psi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ stetig differenzierbar; $g(y) \leq \psi(y) \forall y \in [c, d]$.

$$g(y) = \int_{g(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx; \quad x \in [a, b]; \quad y \in [c, d]$$

• g ist differenzierbar auf $[c, d]$

$$\frac{dg}{dy} = \frac{d}{dy} \left(\int_{g(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx \right) = \int_{g(y)}^{\psi(y)} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) dx + f(\psi(y), y) \cdot \psi'(y) - f(g(y), y) \cdot g'(y)$$

Partielle Integration

$$\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx \quad \text{mit } U \text{ als eine Stammfunktion von } u$$

Aus dem Integralsatz von Gauss folgt eine Verallgemeinerung der partiellen Integration:

$$\int_V f \cdot \operatorname{div}(\vec{F}) dS = \int_{\partial V} f \langle \vec{F}, \vec{n}_0 \rangle dS - \int_V \vec{F} \cdot \operatorname{grad}(f) dS$$

• $V \subseteq \mathbb{R}^n$, kompakt; ∂V stückweise glatt
• $\vec{F}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$; $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
• f stück aus V ; S stück aus ∂V

Substitutionsregel

Sei $H \subseteq \mathbb{R}^n$ offen; $D \subseteq H$ kompakt und Jordan-messbar; $h: H \rightarrow H^*$ injektiv und stetig partiell differenzierbar; $f: H^* \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig und reell.

• $\det Dh(t) = \det(J_h(t))$ sei entweder positiv $\forall t \in H$ oder negativ $\forall t \in H$

$\Rightarrow H^*$ ist Jordan-messbar; f ist auf H^* Riemann-integrierbar

$$\int_{H^*} f(x) dx = \int_{D \subseteq H} f(h(t)) \cdot |\det(Dh(t))| dt; \quad x \in H^*; \quad t \in D \subseteq H$$

Sei weiter $N \subseteq D$ eine Jordansche Nullmenge und $\det(Dh(t)) = 0$ für $t \in N$ oder $h(t)$ nicht injektiv für $t \in N$, dann gilt die Gleichung immer noch.

$$\hookrightarrow \mathbb{R}^1: \int_a^b u(x) dx \mid x = v(t) \Rightarrow \int_{v^{-1}(a)}^{v^{-1}(b)} u(v(t)) \cdot v'(t) dt$$

$$\hookrightarrow \text{Umkehrung: } \int_a^b u(v(x)) \cdot w(x) dx \mid z = v(x) \Rightarrow \int_{v(a)}^{v(b)} u(z) \cdot \underbrace{\frac{w(x)}{v'(x)}}_{\text{Konstant}} dz$$

$\frac{w(x)}{v'(x)}$ muss von x unabhängig sein (x muss sich heraus kürzen)

Nabla-Operator

• F : Vektorfeld

• f : Skalarfeld

Der Nabla-Operator ist ein symbolischer Vektor in kartesischen Koordinatensystemen:

$$\nabla = \begin{bmatrix} \partial/\partial x_1 \\ \vdots \\ \partial/\partial x_n \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \nabla f &= \operatorname{grad}(f) \\ \langle \nabla, F \rangle &= \operatorname{div}(F) \\ \nabla \times F &= \operatorname{rot}(F) \end{aligned} \quad \begin{aligned} \text{Die zweifache Anwendung heißt } &\underline{\text{Laplace-Operator}} \\ \langle \nabla, \nabla \rangle &= \Delta \Rightarrow \Delta f = \langle \nabla, \operatorname{grad}(f) \rangle \end{aligned}$$

Divergenz

$\vec{F}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$\operatorname{div}(F): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$\operatorname{div}(\vec{F}_0) = \lim_{|\Delta V| \rightarrow 0} \left(\frac{1}{|\Delta V|} \int_{\partial(\Delta V)} \frac{\vec{F}_0 \cdot \vec{h}}{\|\vec{h}\|} dS \right)$$

Für kartesische Koordinaten x_1, \dots, x_n :

$$\operatorname{div}(\vec{F}_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(\vec{x}) = \langle \nabla, \vec{F}_0 \rangle = \operatorname{spur}(\underbrace{J_F(\vec{x})}_{\text{Jakobi-Matrix}})$$

• div ist linear

$$\hookrightarrow \operatorname{div}(c \cdot \vec{F}_0) = c \cdot \operatorname{div}(\vec{F}_0)$$

$$\hookrightarrow \operatorname{div}(\vec{F}_0 + \vec{G}_0) = \operatorname{div}(\vec{F}_0) + \operatorname{div}(\vec{G}_0)$$

$$\operatorname{div}(u(\vec{x}) \cdot \vec{F}(\vec{x})) = \langle \operatorname{grad}(u(\vec{x})), \vec{F}(\vec{x}) \rangle + u(\vec{x}) \cdot \operatorname{div}(\vec{F}(\vec{x}))$$

Spezielle Funktionen

$F(x) + C$	$f(x)$	$f'(x)$	$\int f^{-1}(x) + C$	$f^{-1}(x)$	$f^{-1'}(x)$
e^x	e^x	e^x	$x \cdot \ln(x) - x$	$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$x \cdot \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$	$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$x \cdot \arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$	$\arccos(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$-\ln(\cos(x))$	$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos(x)^2}$	$x \cdot \operatorname{atan}(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$	$\operatorname{atan}(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\ln(\sin(x))$	$\cot(x)$	$\frac{-1}{\sin(x)^2}$	$x \cdot \operatorname{acot}(x) + \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$	$\operatorname{acot}(x)$	$\frac{-1}{1+x^2}$
$\ln\left(\left \frac{1+\sin(x)}{\cos(x)}\right \right)$	$\sec(x)$	$\sec(x) \cdot \tan(x)$	$x \cdot \operatorname{asec}(x) - \ln x+\sqrt{x^2-1} $	$\operatorname{asec}(x)$	$\frac{1}{ x \sqrt{x^2-1}}$
$\ln\left(\left \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}\right \right)$	$\csc(x)$	$-\frac{\cos(x)}{\sin(x)^2}$	$x \cdot \operatorname{acsc}(x) + \ln x+\sqrt{x^2-1} $	$\operatorname{acsc}(x)$	$\frac{-1}{ x \sqrt{x^2-1}}$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	$\cosh(x)$	$x \cdot \operatorname{asinh}(x) - \sqrt{x^2+1}$	$\operatorname{asinh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	$x \cdot \operatorname{acosh}(x) - \sqrt{x^2-1}$	$\operatorname{acosh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}; x > 1$
$\ln(\cosh(x))$	$\tanh(x)$	$1 - \tanh(x)^2$	$x \cdot \operatorname{atanh}(x) + \frac{1}{2} \ln(1-x^2)$	$\operatorname{atanh}(x)$	$\frac{1}{1-x^2}; x < 1$
$\ln(\sinh(x))$	$\coth(x)$	$\frac{-1}{\sinh(x)^2}$	$x \cdot \operatorname{acoth}(x) + \frac{1}{2} \ln(x^2-1)$	$\operatorname{acoth}(x)$	$\frac{1}{1-x^2}; x > 1$
$\operatorname{atan}(\sinh(x))$	$\operatorname{sech}(x)$	$\frac{-\sinh(x)}{\cosh(x)^2}$	$x \cdot \operatorname{asech}(x) - \operatorname{atan}\left(\sqrt{\frac{2}{x}-1}\right)$	$\operatorname{asech}(x)$	$-\frac{1}{x \cdot \sqrt{1-x^2}}$
$\ln(\tanh(x))$	$\operatorname{csch}(x)$	$-\operatorname{csch}(x) \sqrt{1+\operatorname{csch}(x)^2}$	$x \cdot \operatorname{arsch}(x) + \ln x+\sqrt{1-x^2} $	$\operatorname{arsch}(x)$	$-\frac{1}{x \cdot \sqrt{1-x^2}}$

Schwierige Integrale

$\bullet \int \sin(x)^2 dx = \frac{-\cos(x) \cdot \sin(x) + x}{2} + C \Rightarrow \int \cos(x)^2 dx = \cos(x) \sin(x) - \frac{x}{2} + C$

$\bullet \int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{x \cdot \sqrt{1-x^2} + \arcsin(x)}{2} + C$

$\bullet \int \frac{1}{(x^2+px+q)^m} dx = \frac{x+p}{2(m-1)(q-\frac{1}{4}p^2)(x^2+px+q)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2(m-1)(q-\frac{1}{4}p^2)} \cdot \int \frac{1}{(x^2+px+q)^{m-1}} dx; m \geq 2$

Differentialgeometrie

Differenzierbare Mannigfaltigkeit

Differenzierbare Mannigfaltigkeiten sind im Prinzip geometrische Formen (Weg, Fläche, Volumen, ...). Die Dimension der Mannigfaltigkeit (M), also die "Anzahl (an Richtungen)", in die man sich von einem Punkt $P \in M$ bewegen kann ohne an zu verlaufen, kann dabei von der Dimension des Raumes, in dem sich M befindet, verschieden sein. Die Kugeloberfläche ist eine 2D-Mannigfaltigkeit im \mathbb{R}^3 .

Um mit der Mannigfaltigkeit rechnen zu können, braucht man eine Parameterdarstellung von M . Dies sind in der Regel Funktionen $m_i: S_i \subseteq S \rightarrow a_i \subseteq A$, wobei $A \subseteq \mathbb{R}^m$ die geometrische Form und $S \subseteq \mathbb{R}^n$; $S = \bigcup_i S_i$ die Urbildmenge mit der Dimension n der Mannigfaltigkeit ist.

Die m_i heißen zusammen mit S_i Karten von M und bilden zusammengekommen einen Atlas.

- Die Karten müssen dabei Homöomorphismen sein, also bijektiv und stetig.
- Eine Mannigfaltigkeit M heißt orientierbar, wenn für jeden Punkt $P \in M$ eine offene Umgebung U mit einer Karte $\varphi: U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^m$ existiert, sodass $\forall q \in U$ die Orientierungen der Tangentialräume von P und q gleich sind.

Ein Beispiel für eine nicht-orientierbare Mannigfaltigkeit ist das Möbiusband



siehe Matrizen; Basiswechsel

Typische Parametrisierungen

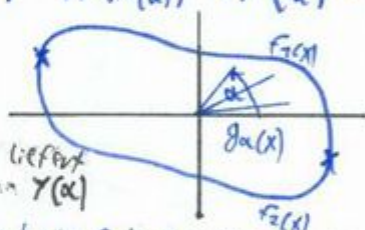
Das Verfahren der Parametrisierung beschreibt die Suche nach geeigneten Karten für eine Mannigfaltigkeit.

↳ Funktionsgraph: Der Graph einer Abbildung $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kann leicht in eine Parameterdarstellung einer eindimensionalen Mannigfaltigkeit im \mathbb{R}^2 überführt werden: $X: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad X = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}$

↳ Polarkoordinaten: Der Zusammenhang zwischen den kartesischen Koordinaten $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ eines Punktes $P \in \mathbb{R}^2$ und seinen Polarkoordinaten $\begin{pmatrix} r \\ \alpha \end{pmatrix}$ ist gegeben durch: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\alpha) \\ r \cdot \sin(\alpha) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} r \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \arctan 2(y, x) \end{pmatrix}$

- Beschreiben die Funktionen f_1 und f_2 den Rand einer zum Nullpunkt sternförmigen Menge, so können diese in Polarkoordinaten überführt werden, indem man den Schnittpunkt von f_1 und f_2 mit einer Funktionssehne $g_\alpha(x)$ bestimmt:

$r = g_\alpha(x) = |x| \cdot \tan(\alpha) := f_1(x) \text{ oder } f_2(x)$ } Lösung heißt X liefert $X(\alpha)$ und dann $Y(\alpha)$



• Funktionaldeterminante: r

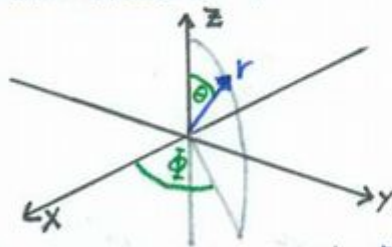
↳ Zylinderkoordinaten: Die Zylinderkoordinaten sind wie Polarkoordinaten, nur, dass es noch eine dritte Variable z gibt, die unverändert bleibt: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\alpha) \\ r \cdot \sin(\alpha) \\ z \end{pmatrix}$ • Funktionaldeterminante: r

↳ Kugelkoordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\phi) \\ r \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(\phi) \\ r \cdot \cos(\theta) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) \\ \arctan 2(y, x) \end{pmatrix}$$

• Funktionaldeterminante: $r^2 \cdot \sin(\theta)$

• Kugelkoordinaten sind im \mathbb{R}^n verallgemeinerbar!



Äquivalente Parametrisierung

Seien $\tilde{D}, \tilde{E} \subseteq \mathbb{R}^n$; $F: \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}^m$; $G: \tilde{E} \rightarrow \mathbb{R}^m$. F und G heißen äquivalent, wenn ein Diffeomorphismus

$\varphi: \tilde{D} \rightarrow \tilde{E}$ existiert, sodass $F = G \circ \varphi$ und $\det(D\varphi) > 0$ auf \tilde{D} .

φ bijektiv, φ und φ^{-1} stetig differenzierbar

- Die zu F und G gehörenden Karten haben die gleiche Orientierung

Gramsche Determinante

Um Integrale auf Mannigfaltigkeiten berechnen zu können, benötigt man Karten, die man in die Differentialformen einsetzen kann. Ist die Dimension der Mannigfaltigkeit ungleich der Dimension des Raumes, in dem sich diese befindet, ist es nicht möglich, die Funktionaldeterminante für die Substitutionsregel zu bilden. Stattdessen kann die Wurzel aus der Gramschen Determinante als Volumeneinheit für ein Stück ΔA der Mannigfaltigkeit herangezogen werden:

$$\int_M \vec{F}(\vec{x}) dM = \int_S \vec{F}(m(t)) \cdot \sqrt{g_m} ds; g_m = \det(g_m) = \det\left(\left(\frac{\partial m}{\partial t_i}\right)^T \cdot \left(\frac{\partial m}{\partial t_j}\right)\right)$$

metrischer Tensor Gramsche Determinante Jakobimatrix von m

Anmerkung: Viele Differentialformen, wie etwa Tangential- oder Normalenfelder enthalten je nach Berechnungsweise die Gramsche Determinante bereits. Statt $\vec{n}_0 \cdot \sqrt{g_m}$ kann man also oft \vec{n} schreiben.

Wege / Kurven

Eine Kurve X ist eine eindimensionale, differenzierbare Mannigfaltigkeit im \mathbb{R}^n .

Ihre Parameterdarstellung $X: J \rightarrow \mathbb{R}^n$; $J = [a, b]$; $a, b \in \mathbb{R}$ heißt Weg.

• $X(a)$ heißt Anfangspunkt; $X(b)$ heißt Endpunkt. • X heißt geschlossen, wenn $X(a) = X(b)$

• Wenn X auf $[a, b]$ injektiv, so heißt X Jordan-Weg oder einfacher Weg.

• Existiert ein $L_X \in \mathbb{R}$, sodass $L_X = \sup \left(\sum_{k=1}^n \underbrace{X(t_k)X(t_{k-1})}_{\text{Strecke zwischen den Wegpunkten}} \right)$; $n \in \mathbb{N}$; $a \leq t_0 \leq \dots \leq t_n \leq b$, dann heißt

X rektifizierbar $\Rightarrow X$ ist endlich lang.

\Rightarrow Stetig differenzierbare Wege sind rektifizierbar. In diesem Fall ist die Weglänge:

$$L_X = \int_a^b \left\| \frac{\partial X}{\partial t}(t) \right\| dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial t}(t) \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial x_n}{\partial t}(t) \right)^2} dt$$

• Seien X_1, \dots, X_n Wege auf auseinander hängenden Intervallen $[a, t_1], (t_1, t_2), \dots, (t_{n-1}, t_n], (t_n, b]$
dann kann man diese addieren zu $X = X_1 \circ \dots \circ X_n = \begin{cases} X_1(t) & \text{falls } t \in [a, t_1] \\ \vdots \\ X_n(t) & \text{falls } t \in (t_{n-1}, t_n] \end{cases}$

\Rightarrow Sind X_1, \dots, X_n stetig differenzierbar, dann ist X rektifizierbar und $L_X = L_{X_1} + \dots + L_{X_n}$

Kurvenintegrale

Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$; $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig; $X: [a, b] \rightarrow X$ ein stetig differenzierbarer Weg:

$$\int_X f(x) dx = \int_a^b f(X(t)) \cdot \|DX(t)\| dt = \int_a^b f(X(t)) \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial t}(t) \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial x_n}{\partial t}(t) \right)^2} dt$$

• Kurvenintegrale über geschlossene Wege haben das Symbol \oint und heißen Vmläufe

Sei $\vec{F}: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld:

$$\int_X \vec{F}(x) dx = \int_X \langle \vec{F}(x), \vec{T}_0(x) \rangle ds = \int_a^b \langle \vec{F}(X(t)), \underline{DX(t)} \rangle dt$$

• ds ein infinitesimal kleines Wegstück aus X
• \vec{T}_0 Tangenten einheitsfeld von X
• $\underline{DX(t)}$ Jakobimatrix von X

Potential

Existiert zum Vektorfeld \vec{F} oben eine stetig partiell differenzierbare Stammfunktion $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$,

sodass: $\vec{F}(\vec{x}) = (\text{grad } \varphi)(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(\vec{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(\vec{x}) \end{pmatrix}$; $\vec{x} \in X$, dann heißt φ Potential von \vec{F} .

• Wenn X ein Gebiet ist und \vec{F} ein Potential besitzt, so ist das Kurvenintegral wegunabhängig:

• Es existiert genau dann ein Potential von \vec{F} , wenn $\text{rot}(\vec{F}) = 0 \quad \forall x$

$$\int_X \vec{F}(x) dx = \varphi(X(b)) - \varphi(X(a))$$

(Ober) Flächen

Eine Fläche F ist eine zweidimensionale, differenzierbare Mannigfaltigkeit im \mathbb{R}^n ; $n \geq 2$

Eine Karte von F hat die Gestalt: $\vec{F}: \bar{S} \subseteq S \rightarrow a \subseteq F$; $S \subseteq \mathbb{R}^2$; $F \subseteq \mathbb{R}^n$. $\vec{F}(t)$

- Eine Fläche heißt regulär, wenn \vec{F} ein Homöomorphismus und stetig differenzierbar ist

Und $\text{Rang}(D\vec{F}) = 2 \Rightarrow \vec{F}$ ist injektiv oder doppelpunktfrei
Jakobimatrix

bijektiv, F und F^{-1} stetig

stetig diffbar auf einer abgeschlossenen Menge \bar{S} bedeutet F ist auf eine offene Menge U stetig fortsetzbar, sodass $\bar{S} \subseteq U$

\Rightarrow Die Rangbedingung muss nicht auf $\partial \bar{S}$ erfüllt sein.

Tangentialebene:

$\vec{p} \in \mathbb{R}^2$

$$T_p = \vec{F}(p_1, p_2) + \lambda \cdot \frac{\partial \vec{F}}{\partial t_1}(p_1, p_2) + \mu \cdot \frac{\partial \vec{F}}{\partial t_2}(p_1, p_2); \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Normalenfeld:

$n=3$

$$\vec{n}(t) = \frac{\partial \vec{F}}{\partial t_1}(t) \times \frac{\partial \vec{F}}{\partial t_2}(t); \vec{n}_0(t) = \frac{\vec{n}(t)}{\|\vec{n}(t)\|}$$

Weg in F

Ein Weg $X: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, der komplett in F liegt, hat die Form $X(u) = \vec{F}(Y(u))$; $Y: \mathbb{R} \rightarrow \bar{S}$

Flächenintegrale im \mathbb{R}^3

Sei $F: \bar{S} \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine reguläre Karte einer Fläche; $h: F \rightarrow \mathbb{R}$ stetig:

$$\int_F h(x) dF = \int_{\bar{S}} h(F(t)) \cdot \underbrace{\sqrt{g_F}}_{\text{Gramsche Determinante}} dt = \int_{\bar{S}} h(F(t)) \cdot \underbrace{\left\| \frac{\partial \vec{F}}{\partial t_1}(t) \times \frac{\partial \vec{F}}{\partial t_2}(t) \right\|}_{\vec{n}(t)} dt$$

\Rightarrow Für $h=1$ ist $\int_F 1 dF = \int_{\bar{S}} \sqrt{g_F} dt := J(F)$ der Flächeninhalt von F

Sei nun $\vec{H}: F \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetiger Vektorfeld:

$$\int_F \vec{H} dF = \int_{\bar{S}} \langle \vec{H}(F(t)), \vec{n}_0(F(t)) \rangle dt = \int_{\bar{S}} \langle \vec{H}(F(t)), \frac{\vec{n}(t)}{\|\vec{n}(t)\|} \rangle dt$$

Bei Berechnung wie oben kürzt sich $\|\vec{n}\|$ mit $\sqrt{g_F}$

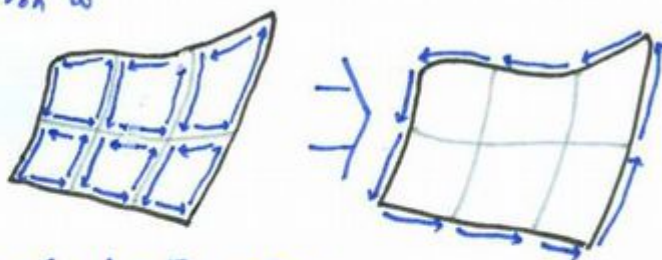
Integral sätze

Satz von Stokes

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

- M : n -dimensionale, kompakte, differenzierbare Mannigfaltigkeit
- ∂M : Rand von M ; abschnittsweise glatt; induzierte Orientierung
- ω : stetig differenzierbare, alternierende Differentialform auf M vom Grad $n-1$
- $d\omega$: die Cartan-Ableitung von ω

Aussage: Es gibt ein allgemeines, topologisches Prinzip, nach dem sich bei orientierter Pflasterung die inneren Beiträge der Umläufe zum Gesamtumlauf paarweise aufheben.



↳ Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

$$\int_a^b df(x) = \int_a^b \frac{df}{dx}(x) dx = f(x) \Big|_a^b = f(b) - f(a)$$

- $(a, b) \subset \mathbb{R}$, offen
- $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar

↳ Integralsatz von Gauß - Ostrogradsky

$$\int_V \operatorname{div}(\vec{F}(\vec{x})) dV = \int_{\partial V} \langle \vec{F}(\vec{x}), \vec{n}_o(\vec{x}) \rangle dS$$

Sei $h: V \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Parameterdarstellung von ∂V :

- $V \subseteq \mathbb{R}^n$, offen
- $n \geq 2$
- $\vec{F}: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar
- \vec{n}_o : nach außen zeigendes Normaleneinheitsfeld von ∂V

$$\int_{\partial V} \langle \vec{F}(\vec{x}), \vec{n}_o(\vec{x}) \rangle dS = \int_V \langle \vec{F}(h(t)), \vec{n}_o(h(t)) \rangle \cdot \sqrt{\det((Dh(t))^T \cdot (Dh(t)))} dt = \int_V \langle \vec{F}(h(t)), \vec{n}(h(t)) \rangle dt$$

mit $\vec{n}(h(t)) = \left(\frac{\partial h}{\partial t_1}(t) \right) \times \dots \times \left(\frac{\partial h}{\partial t_{n-1}}(t) \right)$; $\vec{n}_o(h(t)) = \frac{\vec{n}(h(t))}{\|\vec{n}(h(t))\|}$

Die Wurzel der Gramschen Determinante ist der Volumeninhalt eines Hyperflächenstücks dS . Dieser ist hier gleich dem des Paralleloteps $\left(\frac{\partial h}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial h}{\partial t_{n-1}} \right)$ und sollte sich hier mit $\|\vec{n}(h(t))\|$ weg kürzen.

Des Weiteren müssen der Normalenvektor und die Vektoren $\left(\frac{\partial h}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial h}{\partial t_{n-1}} \right)$ ein Rechtssystem bilden. Hierfür muss die Parameterdarstellung angepasst werden. Integrieren in entgegengesetzter Richtung kann zu Fehlern führen, da die Richtung der Ableitungen ∂h mit der des Integrals übereinstimmen muss.

↳ Klassischer Integralsatz von Stokes

$$\iint_A \langle \operatorname{rot}(\vec{F}(\vec{x})), \vec{n}_o(\vec{x}) \rangle dS = \oint_{\partial A} \langle \vec{F}(\vec{x}), \vec{t}_o(\vec{x}) \rangle ds$$

Sei $h: V \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow A \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Parameterdarstellung von A , so gilt für die linke Seite:

$$\iint_A \langle \operatorname{rot}(\vec{F}(\vec{x})), \vec{n}_o(\vec{x}) \rangle dS = \iint_V \langle \operatorname{rot}(\vec{F}(h(t))), \vec{n}(h(t)) \rangle dt$$

Sei $X: J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \partial A \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Parameterdarstellung von ∂A , so gilt für die rechte Seite:

$$\oint_{\partial A} \langle \vec{F}(\vec{x}), \vec{t}_o(\vec{x}) \rangle ds = \int_J \langle \vec{F}(X(u)), DX(u) \rangle du$$

Wegintegral

- $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar
- $A \subset \mathbb{R}^3$ eine 2D, reguläre Fläche mit Rand ∂A
- dS ein infinitesimal kleines Flächenstück aus A
- \vec{n}_o der Normaleneinheitsvektor von dS
- ds ein infinitesimal kurzes Wegstück aus ∂A
- \vec{t}_o der Tangenten einheitsvektor von dS

mit Kreuzprodukt, wie bei Gauß'schem Integralsatz



Green'sche Formeln

Laplace-Operator: siehe Poisson-Operator

$$\int_{\partial V} f(\vec{x}) \cdot \frac{\partial g}{\partial n_o}(\vec{x}) dS = \int_V (f(\vec{x}) \Delta g(\vec{x}) + \operatorname{grad}(f(\vec{x})) \cdot \operatorname{grad}(g(\vec{x}))) dV$$

Richtungsableitung von g nach \vec{n}_o

$$\int_{\partial V} (f(\vec{x}) \cdot \frac{\partial g}{\partial n_o}(\vec{x}) - g(\vec{x}) \cdot \frac{\partial f}{\partial n_o}(\vec{x})) dS = \int_V (f(\vec{x}) \cdot \Delta g(\vec{x}) - g(\vec{x}) \cdot \Delta f(\vec{x})) dV$$

- $V \subseteq \mathbb{R}^n$, $x \in V$
- dS : infinitesimal kleines Stück aus ∂V
- \vec{n}_o : Normaleneinheitsfeld von ∂V
- $f, g: V \rightarrow \mathbb{R}$

Trigonometrische Funktionen

↳ Sinus:

$$\sin(x) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \sin(x + 2z\pi) = \cos(x - \frac{\pi}{2}) = \pm \sqrt{1 - \cos^2(x)} = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= i \cdot \sinh\left(\frac{x}{i}\right) = \frac{d}{dx} (-1) \cdot \cos(x) = x \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2}\right) = \frac{2 \cdot \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \sin(\pi - x)$$

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

$$\sin(x \pm y) = \sin(x) \cdot \cos(y) \pm \cos(x) \cdot \sin(y) \quad |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\Delta(a,b))$$

$$\hookrightarrow \sin(2x) = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$$

$$\sin(n \cdot x) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^i \cdot \binom{n}{2i+1} \cdot \sin(x)^{2i+1} \cdot \cos(x)^{n-2i-1} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^k \cdot \binom{n-1}{k} 2^{n-2k-1} \cdot \cos(x)^{n-2k-1}$$

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{2}}$$

$$\sin(\arcsin(x)) = \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$$

$$\sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\sin(x)^n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot \cos((n-2k) \cdot (x - \frac{\pi}{2})) \Rightarrow \sin(x)^2 = \frac{1}{2} (1 - \cos(2x))$$

↳ Kosinus:

$$\cos(x) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \cos(x + 2z\pi) = \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \pm \sqrt{1 - \sin^2(x)} = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

$$= \cosh\left(\frac{x}{i}\right) = \frac{d}{dx} \sin(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{(2n-1)^2 \pi^2}\right) = \frac{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} = -\cos(\pi - x)$$

$$\cos(-x) = +\cos(x)$$

$$\cos(x \pm y) = \cos(x) \cdot \cos(y) \mp \sin(x) \cdot \sin(y) \quad x, y \in \mathbb{C}$$

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos(x)}{2}}$$

$$\hookrightarrow \cos(2x) = \cos(x)^2 - \sin(x)^2 = 1 - 2\sin(x)^2$$

$$\cos(n \cdot x) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^i \cdot \binom{n}{2i} \cdot \sin(x)^{2i} \cdot \cos(x)^{n-2i}$$

$$\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\Delta(a,b))$$

$$\cos(x)^n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot \cos((n-2k) \cdot x) \Rightarrow \cos(x)^2 = \frac{1}{2} (1 + \cos(2x))$$

↳ Tangens:

$$\tan(x) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(\pi - x) = \frac{2 \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{\cot(x)}$$

$$\tan(-x) = -\tan(x)$$

$$\tan(\arcsin(x)) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\tan(\arcsin(x)) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

Die Bildpunkte der Trigonometrischen Funktionen sind genau dann algebraisch, wenn die zugrunde liegenden Winkel mit den Euklidischen Werkzeugen (Kreise und Geraden) gebildet wurden.

$$\sin(x) \pm \sin(y) = 2 \cdot \sin\left(\frac{x \pm y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x \mp y}{2}\right) \quad \cos(x) + \cos(y) = 2 \cdot \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos(x) - \cos(y) = 2 \cdot \sin\left(\frac{y+x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{y-x}{2}\right)$$

$$\tan(x) \pm \tan(y) = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos(x) \cdot \cos(y)}$$

$$\cos(x) \pm \sin(x) = \pm \sqrt{2} \cdot \sin\left(x \pm \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cdot \cos\left(x \mp \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin(x) \cdot \sin(y) = \frac{1}{2} (\cos(x-y) - \cos(x+y)) \quad \cos(x) \cdot \cos(y) = \frac{1}{2} (\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin(x) \cdot \cos(y) = \frac{1}{2} (\sin(x-y) + \sin(x+y)) \quad \sin(x) \cdot \cos(x) = \frac{1}{2} \sin(2x)$$

$$\text{gelte } \alpha + \beta + \gamma = \pi$$

$$\hookrightarrow \tan(\alpha) + \tan(\beta) + \tan(\gamma) = \tan(\alpha) \cdot \tan(\beta) + \tan(\gamma) \quad \hookrightarrow \sin(\alpha) + \sin(\beta) + \sin(\gamma) = 4 \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$\hookrightarrow \sin(\alpha)^2 + \sin(\beta)^2 + \sin(\gamma)^2 = 2 \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) \cdot \cos(\gamma) + 2$$

Komplexe Rechnung & Funktionentheorie

Imaginäre Einheit

$$\pm i = \sqrt{-1}$$

$$i^2 = -1 \cdot \frac{1}{i} = -i$$

Eulersche Formel

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)$$

$$\hookrightarrow e^{i\pi} = -1$$

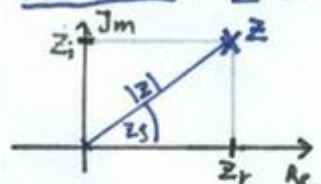
Beweis:

$$e^{\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \varphi^{2n}}{(2n)!} + i \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \varphi^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Komplexe Zahl $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

Algebraische Form: $z = z_r + i z_i$; $z_r = \operatorname{Re}(z)$; $z_i = \operatorname{Im}(z)$; $z_r, z_i \in \mathbb{R}$; $z \in \mathbb{C}$

Polarform: $z = |z| \cdot e^{i\varphi_z}$; $|z| \geq 0$; $-\pi < \varphi_z \leq \pi$; $|z|, \varphi_z \in \mathbb{R}$



$$|z| = \sqrt{z_r^2 + z_i^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$$

$$z_r = |z| \cdot \cos(\varphi_z)$$

$$z_i = |z| \cdot \sin(\varphi_z)$$

$$\varphi_z = \arg(z) = \begin{cases} \arccos\left(\frac{z_r}{|z|}\right) & \text{für } z_i \geq 0 \\ -\arccos\left(\frac{z_r}{|z|}\right) & \text{für } z_i < 0 \end{cases}$$

Komplexe Konjugation

$$\bar{z} = z_r - i z_i \quad \cdot \overline{a+b} = \bar{a} + \bar{b} \quad \cdot \overline{a \cdot b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$$

$$\varphi_z = \begin{cases} \arctan\left(\frac{z_i}{z_r}\right) & \text{für } z_r > 0 \\ \arctan\left(\frac{z_i}{z_r}\right) + \pi & \text{für } z_r < 0, z_i \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{z_i}{z_r}\right) - \pi & \text{für } z_r < 0, z_i < 0 \end{cases}$$

Rechenregeln $[a, b, z \in \mathbb{C} \quad n \in \mathbb{N}]$

Addition/Subtraktion:

$$a \pm b = (a_r \pm b_r) + i(a_i \pm b_i)$$

$$\text{Division: } \frac{a}{b} = \frac{a_r \cdot b_r + a_i \cdot b_i}{b_r^2 + b_i^2} + i \frac{a_i \cdot b_r - a_r \cdot b_i}{b_r^2 + b_i^2} = \frac{|a|}{|b|} \cdot e^{i(\varphi_a - \varphi_b)}$$

Multiplikation:

$$a \cdot b = (a_r \cdot b_r - a_i \cdot b_i) + i(a_r \cdot b_i + a_i \cdot b_r) = |a| \cdot |b| \cdot e^{i(\varphi_a + \varphi_b)}$$

Natürliche Exponentiation:

$$z^n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} (-1)^k \cdot a^{n-2k} \cdot b^{2k} + i \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k+1} (-1)^k \cdot a^{n-2k-1} \cdot b^{2k+1} = |z| \cdot e^{in\varphi_z}$$

$$\text{Natürliche Wurzel: } \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \cdot e^{i(\frac{\varphi_z + k \cdot 2\pi}{n})}; \quad k = 0, \dots, n-1$$

Exponential:

$$e^z = e^{z_r} (\cos(z_i) + i \sin(z_i)) = e^{z + i 2k\pi}; \quad k \in \mathbb{Z}$$

Komplexer Logarithmus:

$$\ln(z) = \ln(|z|) + i(\varphi_z + k \cdot 2\pi); \quad k \in \mathbb{Z}$$

Der komplexe Logarithmus hat unendlich viele Lösungen. Um eine Eindeutigkeit zu erreichen, verwendet man in der Regel den sog. Hauptwert ($k=0$). φ_z liegt dann im Intervall, das als Bildmenge der \arg -Funktion definiert ist (In der Regel $-\pi < \varphi_z \leq \pi$). An den Grenzen dieses Intervalls ($\pm \pi$) ist \ln folglich unstetig und somit auch nicht holomorph.

Trigonometrische- und Hyperbelfunktionen:

$$\sin(z) = \sin(z_r) \cdot \cosh(z_i) + i \cos(z_r) \cdot \sinh(z_i)$$

$$\sinh(z) = \cos(z_i) \cdot \sinh(z_r) + i \sin(z_i) \cdot \cosh(z_r)$$

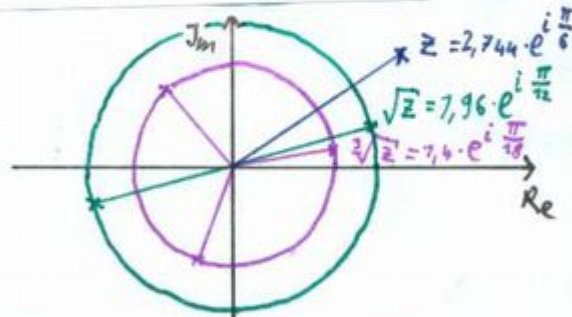
$$\tanh(z) = \frac{\sinh(2z_r)}{\cosh(2z_r) + \cos(2z_i)} + i \frac{\sin(2z_i)}{\cosh(2z_r) + \cos(2z_i)}$$

$$\sin(i \cdot x) = i \cdot \sinh(x)$$

$$\cos(i \cdot x) = \cosh(x)$$

$$\tanh(i \cdot x) = i \cdot \tan(x)$$

$$\coth(i \cdot x) = -i \cdot \cot(x)$$



Komplexe Differenzierbarkeit

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$; $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ und $z_0 \in D$; $z_0 \notin \partial D$. f heißt komplex differenzierbar in z_0 , wenn der Grenzwert $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$ existiert.

- Ist D offen und f in jedem Punkt aus D komplex differenzierbar, so heißt f holomorph auf D .
- f ist nicht komplex differenzierbar in z_0 , wenn zwei Folgen $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = z_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ existieren, sodass $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(a_n) - f(z_0)}{a_n - z_0} \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(b_n) - f(z_0)}{b_n - z_0}$.

Für holomorphe Funktionen gelten die gleichen Regeln, wie für reelle, differenzierbare Funktionen (Produktregel, Kettenregel, Ableitung von Summen, etc.)

Cauchy-Riemannsche Differenzialgleichungen

Sei $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$; $f(z) = u(z_r, z_i) + i v(z_r, z_i) = U(|z|) \cdot e^{iV(z)}$

Und $\tilde{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$; $\tilde{f} = \begin{bmatrix} u(z_r, z_i) \\ v(z_r, z_i) \end{bmatrix}$ sei eine Entsprechung von f im Reellen.

- f ist auf einer offenen Menge D genau dann holomorph, wenn u und v , bzw. U und V auf D stetig, partiell differenzierbar sind und dort die Cauchy-Riemannschen DGLs gelten:

Algebraische Form: $\frac{\partial u}{\partial z_r} = \frac{\partial v}{\partial z_i}$; $\frac{\partial u}{\partial z_i} = -\frac{\partial v}{\partial z_r}$ Polarform: $\frac{\partial U}{\partial |z|} = \frac{1}{|z|} \cdot \frac{\partial V}{\partial \arg z}$; $\frac{\partial U}{\partial \arg z} = -|z| \frac{\partial V}{\partial |z|}$

- $D\tilde{f} = J_{\tilde{f}} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ mit $a = \frac{\partial u}{\partial z_r}$; $b = \frac{\partial v}{\partial z_r}$ } Ist f holomorph, so sind f selbst, sowie Ableitungen und Stammfunktionen von f Konform.

$\Rightarrow \tilde{f}$ ist konform (winkeltreu) $\forall \tilde{f}'(z) \neq 0$

- Mit $\tilde{f} = \begin{bmatrix} u(z_r, z_i) \\ v(z_r, z_i) \end{bmatrix}$ gilt: $\operatorname{div}(\tilde{f}) = \frac{\partial u}{\partial z_r} - \frac{\partial v}{\partial z_i} = 0$; $\operatorname{rot}(\tilde{f}) = -\frac{\partial v}{\partial z_r} - \frac{\partial u}{\partial z_i} = 0$

$\Rightarrow \tilde{f}$ ist quellen- und wirbelfrei.

Ganze Funktionen

- Ist f holomorph, so sind f , u und v unendlich oft (komplex) differenzierbar.
- Ist f auf ganz \mathbb{C} holomorph, so heißt f ganze Funktion.

Satz von Liouville: Ist eine ganze Funktion beschränkt, so muss sie konstant sein.

Allgemeiner: Ist $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und existieren $b, c, d \in \mathbb{R}$, sodass $\forall z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$|f(z)| \leq b \cdot |z|^d + c, \text{ so ist } f \text{ ein Polynom vom Grad } \deg(f) \leq d$$

\Rightarrow Hiermit folgt der Fundamentalsatz der Algebra.

Laplacesche Differentialgleichung

- Ist $f = u(z_r, z_i) + i v(z_r, z_i)$ holomorph, so gilt $\Delta u(z_r, z_i) = 0 = \Delta v(z_r, z_i)$ mit dem Laplace-Operator

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial z_r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_i^2} \Leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial z_r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z_i^2} = 0 = \frac{\partial^2 v}{\partial z_r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z_i^2}$$

$\Rightarrow u$ und v sind harmonisch

Riemannscher Abbildungssatz

Jedes einfach zusammenhängende Gebiet $D \subseteq \mathbb{C}$ lässt sich biholomorph auf die offene Einheitskreisscheibe \mathbb{D} abbilden mit $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

- $\Rightarrow \forall z \in \mathbb{D}$ gibt es je genau eine biholomorphe Abbildung $h: \mathbb{D} \rightarrow D$ mit $h(z) = z$; $h'(z) > 0$

\Rightarrow Holomorphe Funktionen sind für $f'(z_0)$ in einer Umgebung um z_0 injektiv und lokal umkehrbar.

\Rightarrow Seien M und M' einfach zusammenhängende Gebiete $\subseteq \mathbb{C}$, dann existiert eine bijektive, konforme Abbildung von M auf M' .

Offenheitssatz

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen; $f: D \rightarrow E \subseteq \mathbb{C}$ holomorph; f nirgendwo lokal konstant, dann ist E ebenfalls offen. \Rightarrow Ist D ein Gebiet, dann ist $f(D)$ wieder ein Gebiet.

- Ist D ein Gebiet; f auf D holomorph und es existiert ein lokales Maximum von $|f|$ auf D , dann ist f konstant auf D .
- Besitzt $|f|$ in D ein lokales Minimum z_0 in D , dann ist f entweder konstant oder $f(z_0) = 0$.

Komplexe Kurvenintegrale

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$; $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ stetig; $a, b \in \mathbb{R}$; $\gamma: [a, b] \rightarrow \Gamma \subseteq D$ stetig differenzierbar. Nun heißt

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re}(f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)) dt + i \int_a^b \operatorname{Im}(f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)) dt$$

das Kurven- bzw. Wegintegral von f längs Γ bzw. γ .

Vgl. Integrale im \mathbb{R}^n

- Parametrisieren zwei Wege $\gamma_1: [a, b] \rightarrow \Gamma$ und $\gamma_2: [c, d] \rightarrow \Gamma$ die gleiche Kurve Γ , so ist $\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz$.
- Setzt sich Γ aus mehreren Wegen $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ zusammen, so ist $\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \dots + \int_{\gamma_n} f(z) dz$.
- $\int_{\Gamma} (f(z) + g(z)) dz = \int_{\Gamma} f(z) dz + \int_{\Gamma} g(z) dz$ • $\int_{\Gamma^{-1}} f(z) dz = - \int_{\Gamma} f(z) dz$
- $\left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| \leq L(\gamma) \cdot \max_{z \in \Gamma} |f(z)|$
- Seien \tilde{D}, D offen; $g: \tilde{D} \rightarrow D$ holomorph; $\tilde{\gamma}: [a, b] \rightarrow \tilde{D}$ stetig diffbar; $\gamma := g \circ \tilde{\gamma}$; f stetig, dann ist $\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\tilde{\gamma}} f(g(t)) \cdot g'(t) dt$
- Sei $\gamma: [a, b] \rightarrow \Gamma$ stückweise stetig; f_n sei eine Funktionenfolge, die auf Γ gleichmäßig gegen f konvergiert, dann ist f stetig und $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz$
- Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, eine holomorphe Funktion $F: D \rightarrow \mathbb{C}$ heißt Stammfunktion von $f: D \rightarrow \mathbb{C}$, wenn $F'(z) = f(z) \forall z \in D$.
 \Rightarrow Sei $\gamma: [a, b] \rightarrow \Gamma \subseteq D$ stückweise stetig differenzierbar, so ist

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_a^b F'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} (F(\gamma(t))) dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist also ins Komplexe übertragbar.
- Sei $f = u(z) + i v(z)$; $\gamma = z_r(t) + i z_i(t)$, Dann gilt:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b (u(z_r(t), z_i(t)) \cdot z_r'(t) - v(z_r(t), z_i(t)) \cdot z_i'(t)) dt + i \int_a^b (v(z_r(t), z_i(t)) \cdot z_r'(t) + u(z_r(t), z_i(t)) \cdot z_i'(t)) dt$$

Cauchysche Integralformel

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet; $\gamma: [a, b] \rightarrow \Gamma \subseteq D$ stückweise stetig differenzierbar, geschlossen ($\gamma(a) = \gamma(b)$); $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt:

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$$

Sei nun γ doppelpunktfrei, geschlossen, positiv orientiert (gegen Uhrzeigersinn), stückweise stetig differenzierbar und $z_0 \in D$ liege im Innengebiet von Γ , so gilt:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

\Rightarrow Die Funktionswerte im Innengebiet sind eindeutig durch die Funktionswerte auf dem Rand festgelegt.

$$\Rightarrow \int_{\gamma} (z - z_0)^n dz = \begin{cases} 0, & \text{falls } n \neq -1 \\ i 2\pi, & \text{falls } n = -1 \end{cases}$$

Konformität und Holomorphie

Sei $f: G \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $f'(z) \neq 0 \forall z \in G$, dann ist f eine konforme Abbildung in der Riemannschen Zahlenebene. $\Leftrightarrow f$ besitzt eine holomorphe Umkehrfunktion f^{-1} auf G
 $\hookrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(f(x_1 + i x_2)) \\ \operatorname{Im}(f(x_1 + i x_2)) \end{pmatrix}$ ist eine konforme, zweidimensionale Abbildung $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

Möbiustransformationen (gebrochen lineare Funktion):

Sei $\bar{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ die um den unendlich fernen Punkt erweiterte, komplexe Zahlenebene (Riemannsche Zahlenkugel);
 $a, b, c, d \in \mathbb{C}; a \cdot d - b \cdot c \neq 0; f: \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ wie folgt:

$$f(z) = \begin{cases} \frac{a \cdot z + b}{c \cdot z + d} & \text{für } c \cdot z + d \neq 0 \\ \infty & \text{für } c \cdot z + d = 0 \\ a/c & \text{für } z = \infty \end{cases} := w \quad f^{-1}(w) = \begin{cases} \frac{d \cdot w - b}{-c \cdot w + a} & \text{für } w \neq \frac{a}{c}, w \neq \infty \\ \infty & \text{für } w = \frac{a}{c} \\ -d/c & \text{für } w = \infty \end{cases} := z$$

f ist eine konforme Abbildung auf der Riemannschen Zahlenebene

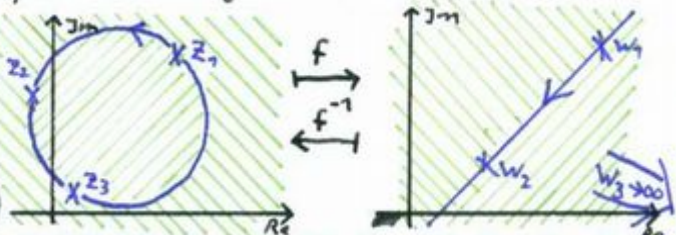
- Es gibt 3 Elementartypen der Möbiustransformation, aus denen sich jede Andere zusammensetzen lässt: Translation: $V_b(z) = z + b$ Drehstreckung: $D_a(z) = z \cdot a$ Inversion: $J(z) = \frac{1}{z}$
 Mit $\mu = \frac{bc-ad}{c}$ gilt: $z \xrightarrow{D_c} c \cdot z \xrightarrow{V_d} c \cdot z + d \xrightarrow{J} \frac{1}{c \cdot z + d} \xrightarrow{D_a} \frac{a}{c + c \cdot z + d} = f(z)$

- Da man im Bruch kürzen kann ist es möglich, mit $a \cdot d - b \cdot c = 1$ die Möbiustransformation zu normieren. Jede Transformation ist somit durch 3 jeweils paarweise verschiedene Bildpunkte $w_1, w_2, w_3 \in \bar{\mathbb{C}}$, sowie 3 Urbildpunkte (ebenfalls verschieden) $z_1, z_2, z_3 \in \bar{\mathbb{C}}$ eindeutig bestimmt;

$$\frac{f(z) - w_1}{f(z) - w_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} \quad \text{Auflösen dieser Gleichung nach } f(z) \text{ ergibt die Abbildung.}$$

Ist ein z_* oder $w_* = \infty$, so ist der jeweilige Zähler/Nenner durch 1 zu ersetzen.

- Möbiustransformationen bilden Kreise auf Kreise ab (sind Kreistreue). Außer ihnen erfüllen nur Funktionen der Gestalt $\frac{a \cdot \bar{z} + b}{c \cdot \bar{z} + d}$ (Satz von Carathéodory)



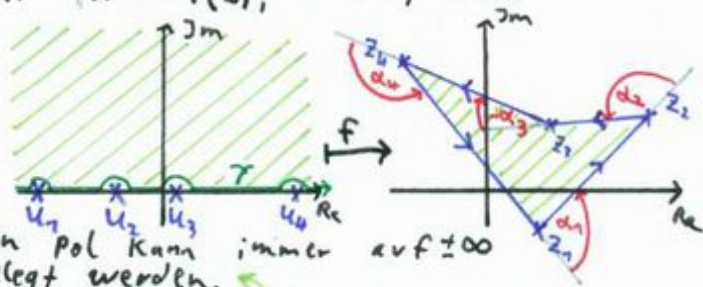
Schwarz-Christoffel-Transformation:

Schwarz-Christoffel-Transformationen sind in der \mathbb{C} -Ebene konforme Abbildungen, die die obere Halbebene auf das Innere eines Polygons abbilden. $z_1, \dots, z_n \in \bar{\mathbb{C}}; u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}; f(u_k) \rightarrow \infty; \gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

$$z := f(w) = A \cdot \int \prod_{k=1}^n (w - u_k)^{-\alpha_k/\pi} dw + B \quad \text{wobei: } w := \gamma(\omega); w \in \mathbb{C}; \omega \in \mathbb{R}$$

f hat an den Stellen u_k Pole. γ ist ein Weg entlang der reellen Achse, der definitionsgemäß an den Polen u_k vorbeiläuft. Die Pole seien sortiert, sodass $u_k < u_{k+1}$ ist.

- 3 Pole u_k dürfen beliebig gewählt werden \Rightarrow ein Pol kann immer auf $\pm \infty$ gelegt werden.
- $\alpha_i \in [-\pi, +\pi]; \sum_{i=1}^n \alpha_i = \pi$

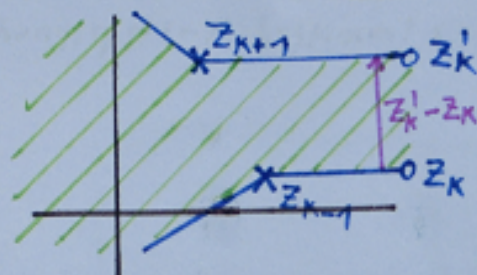


- Wird der Pol $u_i := \pm \infty$ gewählt, so taucht dieser nicht mehr in der Transformation auf: $f(w) = A \cdot \int \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (w - u_k)^{-\alpha_k/\pi} dw + B$
- Die Konstanten A und B , sowie alle nicht-frei gewählten

- Liegt ein z_k im Unendlichen, so ergeben sich parallele Kanten, bei einem Winkel $\alpha_k = \pi$. In diesem Fall kann daraus die Konstante A direkt berechnet werden:

$$A = \frac{i}{\pi} (z_k' - z_k) \cdot \frac{1}{\prod_{\substack{\lambda=1 \\ \lambda \neq k}}^n (u_k - u_\lambda)^{-\alpha_\lambda/\pi}}$$

$\lambda \neq k \leftarrow \text{falls } u_i = \pm \infty$



- Ist die Form in z symmetrisch zur imaginären Achse, so ist es möglich, dass auch alle u symmetrisch zur imaginären Achse sind.

Isolierte Singularität

Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und U eine Umgebung von z_0 . z_0 heißt isolierte Singularität einer Funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, wenn f auf $U \setminus \{z_0\}$ holomorph ist, nicht aber in z_0 selbst. Sei f_n die Laurentreihe von f mit Entwicklungspunkt z_0 .

• z_0 heißt hebbare Singularität, wenn f auf U (mit z_0) holomorph fortsetzbar ist.

\Rightarrow Wenn alle Koeffizienten an der Laurentreihe f_n für $n < 0$ verschwinden.

\hookrightarrow Ist f in einer Umgebung von z_0 beschränkt, so ist z_0 hebbar (Riemannscher Hebbarkeitssatz)

• z_0 heißt Pol, wenn ein $K \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $(z - z_0)^K \cdot f(z)$ eine hebbare Singularität in z_0 besitzt \Leftrightarrow wenn nur endlich viele a_n von f_n mit $n < 0$ nicht verschwinden.

\hookrightarrow Ist K minimal gewählt, so heißt z_0 Pol K-ter Ordnung.

• Ist z_0 weder Pol noch hebbar, so heißt z_0 wesentliche Singularität. In diesem Fall sind unendlich viele a_n des Hauptteils von f_n ungleich 0.

\hookrightarrow z_0 ist genau dann eine wesentliche Singularität, wenn $\forall \omega \in \mathbb{C}$ eine Folge z_n existiert, sodass $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = \omega$ ist. (Casoreti/Weierstraß)

\Rightarrow In jeder punktierten Umgebung von z_0 nimmt das Bild von f jeden Wert aus \mathbb{C} bis auf höchstens eine Ausnahme unendlich oft an. (Großer Satz von Picard)

Residuen (Satz)

In der Funktionentheorie sind Residuen Wegintegrale über geschlossene Kreislängen.

Sei $D := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < R\}$ eine punktierte Kreisscheibe um z_0 ; $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ sei holomorph auf D . Nun heißt

$$\text{Res}(f, z_0) := \frac{1}{i2\pi} \oint_{\gamma} f(z) dz \quad \text{mit } \gamma: |z - z_0| = R; R \in (0, R)$$

γ positiv orientiert geschlossen.

das Residuum von f an der Stelle z_0 .

• Ist f_n die Laurentreihe von f mit Entwicklungspunkt z_0 , so ist a_{-1} das Residuum von z_0 .

• Ist z_0 ein einfacher Pol von f , so ist $\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \cdot f(z)$

• Ist z_0 ein Pol K -ter Ordnung von f , so ist

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(K-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \left(\underbrace{\frac{\partial^{K-1}}{\partial z^{K-1}}}_{K-1\text{-te Ableitung nach } z} \cdot (z - z_0)^K \cdot f(z) \right)$$

• Sind g und h in einer Umgebung von z_0 holomorph, mit $g(z_0) \neq 0$; $h(z_0) = 0$; $h'(z_0) \neq 0$, so hat $f := \frac{g}{h}$ einen Pol erster Ordnung in z_0 mit $\text{Res}(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$

• Sind g und h in einer Umgebung von z_0 holomorph und z_0 sei eine Nullstelle der Ordnung K von g , so ist mit $f := h \cdot \frac{g'}{g}$ $\text{Res}(f, z_0) = h(z_0) \cdot K$.

• Ist h in einer Umgebung von z_0 holomorph, g sei in dieser Umgebung $\setminus z_0$ holomorph und z_0 sei ein Pol. der Ordnung K von g , dann ist mit $f := h \cdot \frac{g'}{g}$ $\text{Res}(f, z_0) = h(z_0) \cdot (-K)$

Residuensatz

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet. $\Gamma \subseteq D$ sei eine positiv orientierte, stückweise glatte, geschlossene, doppelpunktfreie Kurve. $f: D \setminus \{z_1, \dots, z_n\} \rightarrow \mathbb{C}$ sei holomorph, wobei $z_1, \dots, z_n \notin \Gamma$ alle im Innengebiet von Γ liegen. Nun gilt:

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = i2\pi \cdot \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, z_k)$$

• Der Residuensatz kann auch für die Berechnung reeller Integrale der Form $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ verwendet werden. Sei $D := \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$ eine offene Menge, die die obere Halbebene umfasst, $f: D \setminus \{z_1, \dots, z_n\} \rightarrow \mathbb{C}$ sei holomorph; es gelte $\lim_{|z| \rightarrow \infty} z \cdot f(z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$. Dann existiert

$$\text{Das Integral } \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx = i2\pi \cdot \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, z_k)$$

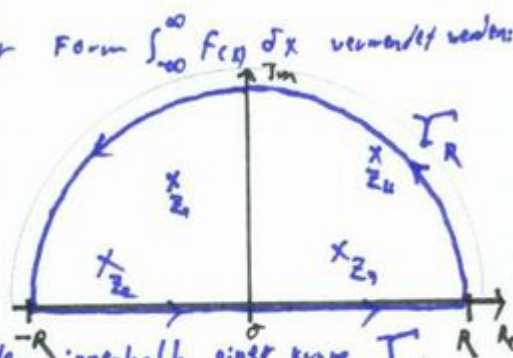
• Beweisidee: Für ein hinreichend großes R liegen alle Singularitäten innerhalb einer Kurve Γ_R . Mit $\lim_{|z| \rightarrow \infty} z \cdot f(z) = 0$ ist das Integral über den Kreisbogen σ und das komplette Umlaufintegral gleich dem Integral über die reelle Achse.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\alpha \cdot x) \cdot f(x) dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\alpha \cdot x) \cdot f(x) dx = i2\pi \sum_{k=1}^n \text{Res}(e^{i\alpha z} \cdot f(z), z_k); \quad \alpha > 0$$

• Sei $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ mit $D := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ beschränkt und eine rationale Funktion und

$$\tilde{f}(z) := \frac{1}{i \cdot z} \cdot f\left(\frac{z + \frac{1}{z}}{2}, i \frac{z - \frac{1}{z}}{2}\right) \quad \text{dann ist } \int_0^{2\pi} f(\cos(t), \sin(t)) dt = i2\pi \sum_{k=1}^n \text{Res}(\tilde{f}, z_k)$$

mit z_1, \dots, z_n als isolierte Singularitäten von \tilde{f} in $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$



Quadratische Gleichungen im \mathbb{R}^n

Darstellung

$$\sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} a_{ji} x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_i x_i + c = 0; \quad x_1 \dots x_n : \text{Unbekannte}$$

$a_{11} \dots a_{nn}$: Koeffizienten v. quadratischen Terme
 $b_1 \dots b_n$: Koeffizienten v. linearen Terme

$$\langle A \vec{x}, \vec{x} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{x} \rangle + c = 0 \quad \text{mit } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{22} & & & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow A \text{ ist symmetrisch, da sich alle } x_i x_j \text{ und } x_j x_i \text{ zusammenfassen lassen. Daher die (2)}$$

Alle Gleichungen dieser Form beschreiben "Kegelschnitte", die verschoben- und gedreht sein können.

Hauptachsentransformation

Entfernt die Verschiebung und die Drehung einer quadratischen Gleichung

1: Drehung entfernen:

EW und EV von A bestimmen. Eine Orthonormalbasis aus EV wählen.

$$T = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n); \quad \vec{x} = T \cdot \vec{y} \Rightarrow \langle A \cdot \vec{x}, \vec{x} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{x} \rangle + c = \langle A \cdot T \cdot \vec{y}, T \cdot \vec{y} \rangle + \langle \vec{b}, T \cdot \vec{y} \rangle + c$$

$$= \langle \underbrace{T^{-1} \cdot A \cdot T}_{T^{-1} = T^T} \vec{y}, \vec{y} \rangle + \langle T^{-1} \cdot \vec{b}, \vec{y} \rangle + c = \langle \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \vec{y}, \vec{y} \rangle + \langle \vec{d}, \vec{y} \rangle + c = 0$$

siehe auch Matrizen: Koordinatenwechsel

\Rightarrow Nun entfallen alle Summanden $x_i x_j; i \neq j$, da steht A jetzt eine Diagonalmatrix im Skalarprodukt steht.

2: Verschiebung entfernen:

$\forall \lambda_k \neq 0$ lässt sich das Linearglied $d_k \cdot y_k$ entfernen. Dies kann mit der quadratischen Ergänzung erfolgen: $\lambda_k \cdot y_k^2 + d_k \cdot y_k = \lambda_k \left(y_k + \frac{d_k}{2\lambda_k} \right)^2 - \frac{d_k^2}{4\lambda_k} = \lambda_k \cdot z_k^2 + e_k$

Falls für alle $\lambda_k = 0$ $d_k = 0$ ist, kann die Gleichung nun in folgender Form geschrieben werden: $\sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot z_k^2 + c' = 0$ mit $z_k = y_k + \frac{d_k}{2\lambda_k}; c' = c + \sum_{k=1}^n e_k$

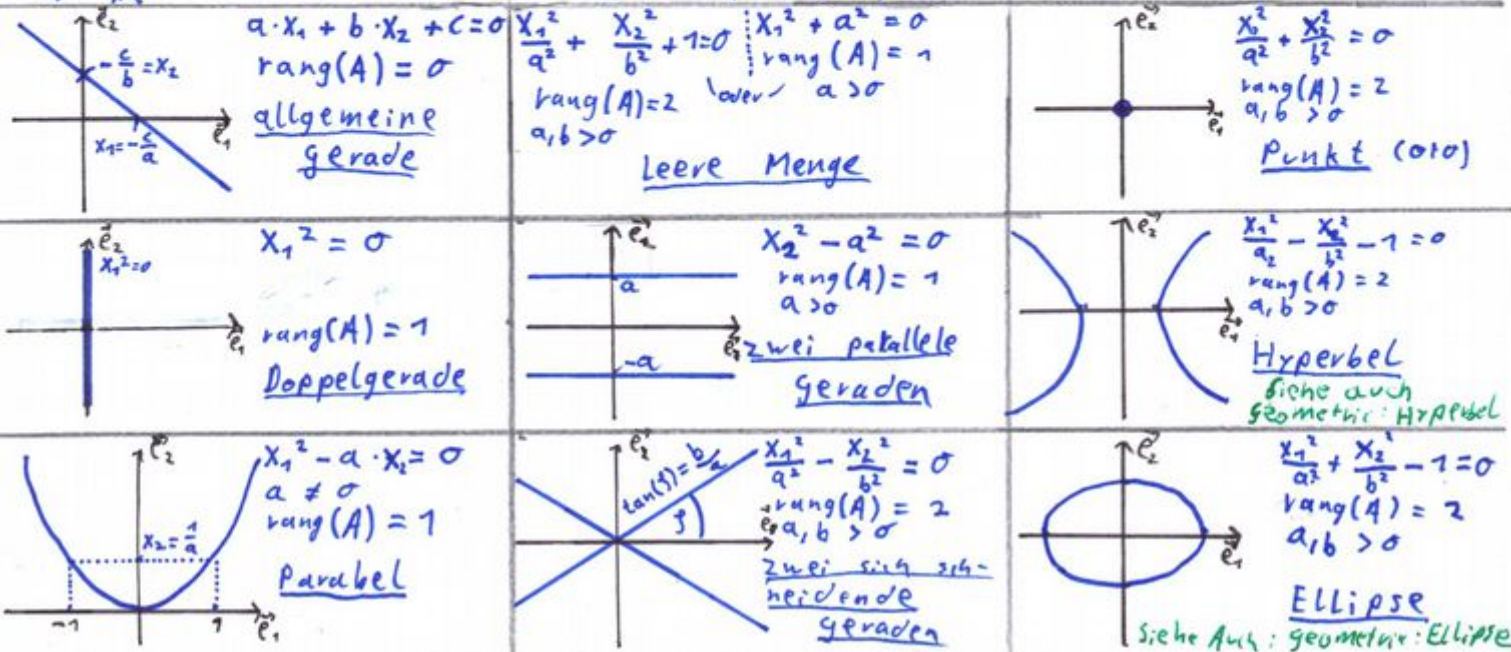
Falls für mindestens ein $\lambda_k = 0$ $d_k \neq 0$ ist, so kommt ein weiterer Summand z_n' hinzu, welcher c' ersetzt: $z_n' = \sum_{k=1}^n d_k \cdot z_k + c'$; mit s als erster Index, mit $\lambda_s = 0; d_s \neq 0$
 Hier alle $d_k \neq 0; \lambda_k = 0$ z_n wird als Unbekannte in der Gleichung aufgeföhrt

Klassifizierung typischer Quadratischer Gleichungen (nach Hauptachsentransformation)

$$\langle A \cdot \vec{x}, \vec{x} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{x} \rangle + c = 0$$

• Die Abbildungen heißen auch Hyperflächen 2. Grades
 • Je nach Reihenfolge der EV bei Hauptachsentransf. können andere Hyperflächen entstehen, bei denen die x_i vertauscht sind.

$\vec{x} \in \mathbb{R}^2$:



$$\vec{x} \in \mathbb{R}^3$$

Hyperflächen 2. Grades, die nicht von x_3 abhängen sind ähnlich zu den Formen im \mathbb{R}^2 ; sie sind lediglich in x_3 -Richtung gestreckt und tragen andere Bezeichnungen:

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - 1 = 0 \quad \text{Ellipse} \rightarrow \text{elliptischer Zylinder}$$

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} - 1 = 0 \quad \text{Hyperbel} \rightarrow \text{hyperbolischer Zylinder}$$

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 0 \quad \text{Punkt} \rightarrow \text{gerade } (x_3\text{-Richtung})$$

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 0 \quad \text{zwei sich schneidende Geraden} \rightarrow \text{Ebenenpaar mit Schnittgerade}$$

$$x_1^2 - a \cdot x_2 = 0 \quad \text{Parabel} \rightarrow \text{parabolischer Zylinder}$$

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + 1 = 0 \quad \text{leere Menge}$$

$$x_1^2 + a^2 = 0 \quad \text{leere Menge} \quad \left. \vphantom{\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + 1 = 0} \right\} \text{leere Menge}$$

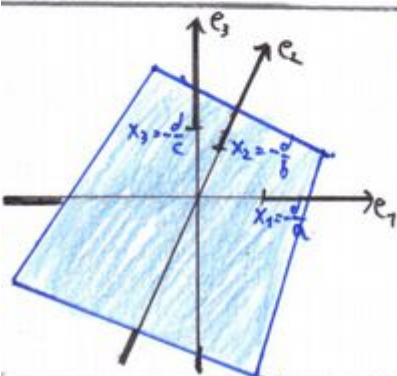
$$x_1^2 - a^2 = 0 \quad \text{zwei parallele Geraden}$$

$$\rightarrow \text{paralleles Ebenenpaar}$$

$$x_1^2 = 0 \quad \text{Doppelgerade}$$

$$\rightarrow \text{Ebene } (x_2 - x_1)$$

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} + 1 = 0 \quad \text{rang}(A)=3 \quad a,b,c > 0 \quad \text{leere Menge}$$

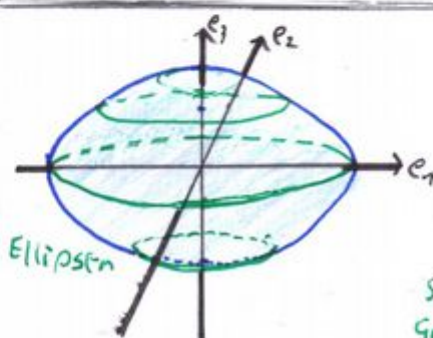


$$a \cdot x_1 + b \cdot x_2 + c \cdot x_3 + d = 0$$

$$\text{rang}(A) = 0$$

$$a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

allgemeine Ebene



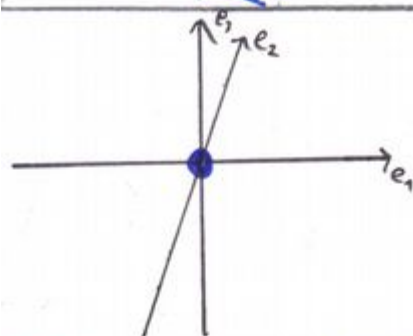
$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} - 1 = 0$$

$$\text{rang}(A) = 3$$

$$a, b, c > 0$$

Ellipsoid

siehe auch:
Geometrie: Ellipse; Ellipsoid

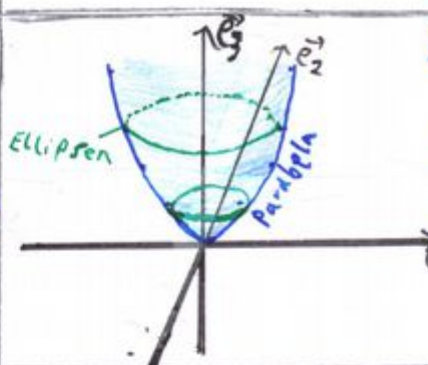


$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 0$$

$$\text{rang}(A) = 0$$

$$a, b, c > 0$$

Punkt (0|0|0)

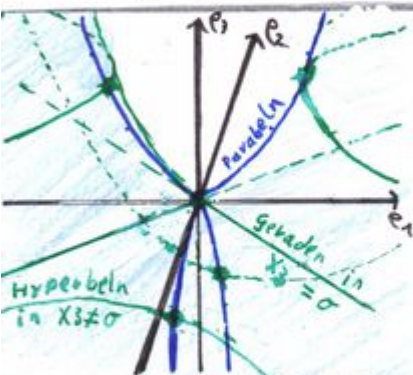


$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - c \cdot x_3 = 0$$

$$\text{rang}(A) = 2$$

$$a, b > 0 \quad c \neq 0$$

elliptisches Paraboloid

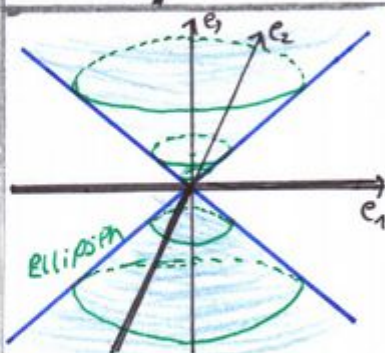


$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} - c \cdot x_3 = 0$$

$$\text{rang}(A) = 2$$

$$a, b > 0 \quad c \neq 0$$

hyperbolisches Paraboloid

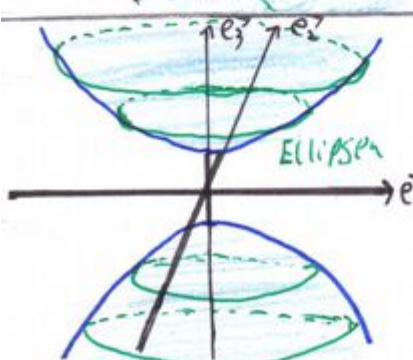


$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = 0$$

$$\text{rang}(A) = 3$$

$$a, b, c > 0$$

elliptischer Kegel

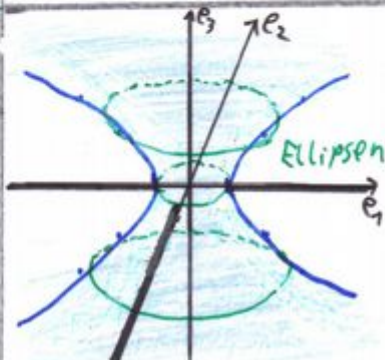


$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} + 1 = 0$$

$$\text{rang}(A) = 3$$

$$a, b, c > 0$$

zweischaliges Hyperboloid



$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} - 1 = 0$$

$$\text{rang}(A) = 3$$

$$a, b, c > 0$$

einschaliges Hyperboloid

Vektoren, Lineare Abbildungen

Skalarprodukt ($\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{C}^n$)

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$$

$$|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle| \leq \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle = \vec{a}^T \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos(\varphi) = \underline{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \dots + a_n \cdot b_n}$$

$$\langle \vec{a}, \vec{b} + \vec{c} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle$$

$$\langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle$$

$$\langle \lambda \cdot \vec{a}, \vec{b} \rangle = \lambda \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$$

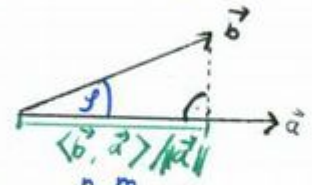
$$\langle \vec{a}, \lambda \cdot \vec{b} \rangle = \lambda \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$$

$$\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c} \rangle = -\langle \vec{b} \times \vec{a}, \vec{c} \rangle$$

$$\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{a} \rangle = \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{b} \rangle = 0$$

$$\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle \cdot \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2$$

Konjugiert komplex ist vertauscht!



→ Für Matrizen (Hilbert-Schmidt-Skalarprodukt): $\langle A_{n \times m}, B_{n \times m} \rangle = \text{spur}(A^H B) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \overline{a_{ij}} \cdot b_{ij}$

Kreuzprodukt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix}$$

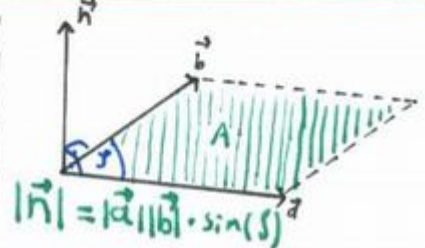
$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \cdot \vec{b} - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \cdot \vec{c}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{a} \times \vec{c}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$$

$$\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \times \vec{d} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \cdot \langle \vec{b}, \vec{d} \rangle - \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle \cdot \langle \vec{a}, \vec{d} \rangle$$

$$= \det \begin{pmatrix} \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle & \langle \vec{a}, \vec{d} \rangle \\ \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle & \langle \vec{b}, \vec{d} \rangle \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \quad \vec{a} \times \vec{a} = 0$$



→ Spatprodukt: $\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{b} \times \vec{c}, \vec{a} \rangle = \text{Vol}$



Lineare Abbildungen

Seien V, W Vektorräume über dem selben Körper, dann ist $f: V \rightarrow W$ genau dann eine lineare Abbildung, wenn f homogen und additiv ist:

$$f(a \cdot \vec{x} + \vec{y}) = a \cdot f(\vec{x}) + f(\vec{y}); \quad a \in K; \quad \vec{x}, \vec{y} \in V \subseteq K^n$$

Lineare Kombination & Lineare Unabhängigkeit

• wenn gilt: $\vec{b} = \gamma_1 \cdot \vec{a}_1 + \dots + \gamma_n \cdot \vec{a}_n$ mit beliebigen $\gamma_k \in K$, dann ist \vec{b} eine Lineare Kombination der Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$.

• n Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ sind linear unabhängig, wenn kein \vec{a}_k als Linear Kombination der anderen dargestellt werden kann \Leftrightarrow die Gleichung $\sum_{k=1}^n \gamma_k \cdot \vec{a}_k = \vec{0}$ nur mit $\gamma_1 = \dots = \gamma_n = 0$ gelöst werden kann. Siehe auch: Matrizen: $R_{n, n}$

Basis siehe auch: Matrizen: Unitäre / orthogonale Matrix: Orthonormalbasis

Eine Basis ist eine Menge aus linear unabhängigen Vektoren. Jeder Vektorraum hat mindestens eine Basis, sodass sich jedes Element des Vektorraums als Linear Kombination der Basisvektoren darstellen lässt.

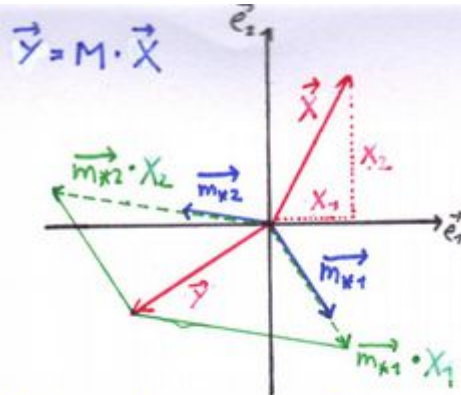
Man kann die Basis eines Vektorraums wechseln: Matrizen: Koordinatentransformation

Dreieck, Kreis, Ellipse, Ellipsoide, Gold'sche Regeln

Matrizen

Matrizen als lineare Abbildung
 $f: K^n \rightarrow K^m: \vec{y} = f(\vec{x}) \quad \vec{y} = M_{m,n} \cdot \vec{x}; \vec{y} \in K^m; \vec{x} \in K^n$

Die Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor ist das Matrixprodukt; der Vektor \vec{x} wird also als $n \times 1$ -Matrix angenommen. Dabei ist \vec{y} die Summe der Spaltenvektoren, von denen jeder mit einem Wert aus \vec{x} multipliziert wurde. Man sagt auch \vec{x} wird in der Basis von M dargestellt. Man kann \vec{x} auch mittels Zeilenvektoren abbilden. Dann gilt: $f: K^n \rightarrow K^m: \vec{y}^T = \vec{x}^T \cdot N_{n,m}$. Mit $N = M^T$ ist dies die gleiche Abbildung.



Multiplikation

Sei $C_{l,n} = A_{l,m} \cdot B_{m,n}$ so gilt: $C_{i,j} = \sum_{k=1}^m a_{i,k} \cdot b_{k,j}$

$$\Rightarrow A \cdot B \neq B \cdot A \quad \Rightarrow (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

$$\Rightarrow (A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T \Rightarrow (A \cdot B)^H = B^H \cdot A^H$$

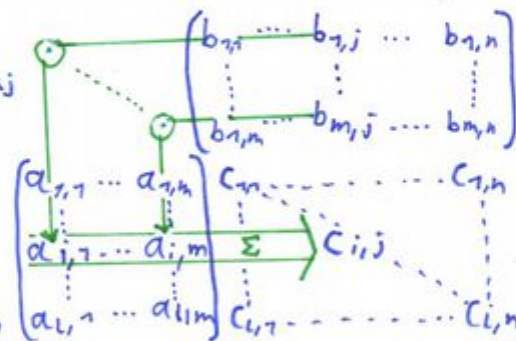
Verkettung von Abbildungen

Seien $f: U \rightarrow V$ und $g: V \rightarrow W$ lineare Abbildungen:

$$\vec{y} = M_f \cdot \vec{u} \quad \vec{w} = M_g \cdot \vec{v} \quad \text{Für die Verkettung}$$

$$g \circ f: U \rightarrow W \text{ gilt nun: } \vec{w} = M_g \cdot M_f \cdot \vec{u} = M_{g \circ f} \cdot \vec{u}$$

Bei Abbildung mittels Zeilenvektoren ist dies natürlich genau umgekehrt: $\vec{w}^T = \vec{u}^T \cdot M_f^T \cdot M_g^T$



Addition von Matrizen

$$A_{m,n} + B_{m,n} = C_{m,n} \quad C_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$$

$$\Rightarrow A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

$$\Rightarrow A + B = B + A \quad \Rightarrow A - B = A + (-1) \cdot B$$

$$\Rightarrow (A + B)^T = A^T + B^T$$

Transposition

$$A_{m,n}^T = B_{n,m} \quad b_{i,j} = a_{j,i}$$

$$\Rightarrow (A^T)^T = A \quad \Rightarrow (A^T)^T = (A^T)^T$$

siehe auch: Adjungierte (hermitisch transponierte)

Kern

$$\vec{K} \in \text{Ker}(A) \quad A \cdot \vec{K} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \text{wenn } \text{Ker}(A) = \{\vec{0}\} \Rightarrow f: \vec{y} = A \cdot \vec{x} \text{ ist injektiv}$$

Rang

Zeilenrang = Spaltenrang = $\text{Rang}(A) := r$
 ist die Anzahl linear unabhängiger Zeilen/Spaltenvektoren von A . Durch elementare Zeilen- und Spaltenoperationen lässt sich A in folgende Form bringen:

$$\begin{pmatrix} (J_{r,r}) & \sigma & \dots & \sigma \\ 0 & \dots & \sigma & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots \end{pmatrix} \text{ wobei } J_{r,r} \text{ die Einheitsmatrix ist.}$$

- $\dim(\text{Ker}(A_{m,n})) = n - \text{Rang}(A)$
- Wenn $\text{Rang}(A_{n,m}) = n$
 - $\det(A_{n,m}) \neq 0$
 - $f: \vec{y} = A \cdot \vec{x}$ ist surjektiv
 - $\text{Ker}(A) = \{\vec{0}\}$

f ist bijektiv, wenn injektiv oder surjektiv

Das Gleichungssystem $\vec{y} = A \cdot \vec{x}$ ist genau dann lösbar, wenn: $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A, \vec{y})$ also \vec{y} eine Linearkombination der Spaltenvektoren von A ist.

Cramersche Regel

Zur Lösung von linearen Gleichungssystemen $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$

$$\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \Rightarrow x_i = \frac{\det(\tilde{A}_i)}{\det(A)} \quad \text{mit } \tilde{A}_i = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

i -te Spalte mit \vec{b} ersetzt.

Koordinatentransformation / Basiswechsel

Sei U ein Vektorraum der Basis $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ und V ein Vektorraum der Basis $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$.
 $f: U \rightarrow V: \vec{y} = A_{m,n} \cdot \vec{x}$. Die Matrix A gilt also für die Basen $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ und $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$.
 Nun soll f angepasst werden: $f': U' \rightarrow V'$ mit $\vec{u}'_1, \dots, \vec{u}'_n$ und $\vec{v}'_1, \dots, \vec{v}'_n$ als Basen für U' und V' .
 $f': \vec{y}' = T_{V \rightarrow V'} \cdot A_{m,n} \cdot T_{U \rightarrow U'} \cdot \vec{x}'$; $T_{U \rightarrow U'} = B_U \cdot B_U^{-1}$; $T_{V \rightarrow V'} = B_V \cdot B_V^{-1}$
 Dabei sind B die Basis-Matrizen, also B_U ist zum Beispiel $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$, usw. $T_{U \rightarrow U'}$ transformiert also die Vektoren von U in die Standard-Basis und von da nach U' .

Adjungierte (hermitisch transponierte) Matrix

Kommt noch

Determinante

Die Determinante einer Matrix ist eine Zahl, die Auskunft über Rang, Invertierbarkeit und vieles mehr gibt.

$$\det(A_{n,n}) = \sum_{\sigma \in S_n} (\text{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)})$$

Eine Reihenfolge aus n Mat.-Zahlen von 1 bis n .

Menge aller Permutationen von n Elementen \Rightarrow Es gibt $n!$ Summanden

• Eine Permutation heißt gerade, wenn man eine geordnete Anzahl an Vertauschungen braucht, um die Ausgangsreihenfolge, hier $1, 2, \dots, n$ wieder herzustellen. Wie man dabei tauscht, ist egal.

+1, wenn σ gerade
-1, wenn σ ungerade

• Sei B eine Dreiecksmatrix, so gilt: $\det(B) = \prod_{i=1}^n b_{i,i}$

↳ Determinante kann per Gauss-Algorithmus bestimmt werden. Wichtig: Dabei darf man Zeilen nicht erweitern, also $|I| = X \cdot I + \dots$ ist nicht erlaubt. Es sind die folgenden Regeln zu beachten:

• Addiert man das λ -fache einer Zeile/Spalte zu einer anderen hinzu, so ändert sich die Determinante nicht.

• Vertauscht man zwei Zeilen/spalten einer Matrix, so gilt: $\det' = -\det$

• Sind 2 Zeilen/spalten linear abhängig, so ist $\det = 0$

↳ wenn $\det(A_{n,n}) \neq 0 \Leftrightarrow \text{Rang}(A_{n,n}) = n$

• $\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det(A)$

• $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

• $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

↳ 2x2: $\det(A_{2,2}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$

↳ Laplacescher Entwicklungssatz:

$$\det(A_{n,n}) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(\tilde{A}_{i,j}) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(\tilde{A}_{i,j})$$

Entwicklung nach j-ter Spalte

Entwicklung nach i-ter Zeile

• $\tilde{A}_{i,j}$ ist die i -j-te Untermatrix von A . i-te Zeile und j-te Spalte weglassen!

• Tipp: Wenn man nach Zeilen und Spalten, die viele Nullen enthalten, entwickelt, geht es schneller!

Inverse Matrix

Sei $f: U \rightarrow V: \vec{x} \mapsto A \cdot \vec{x}$; $\vec{x} \in U$; $\vec{y} \in V$; $\vec{x} \in U$ eine bijektive, lineare Abbildung, dann ist $\det(A) \neq 0$ und es existiert eine Matrix A^{-1} , sodass $f^{-1}: V \rightarrow U: \vec{y} \mapsto A^{-1} \cdot \vec{y}$; $\vec{y} \in V$; $\vec{x} \in U$.

• $A \cdot A^{-1} = J$ • $(A^{-1})^{-1} = A$ • $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ • $(\lambda \cdot A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \cdot A^{-1}$ • $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

• Sei \vec{x} ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ , dann ist \vec{x} auch Eigenvektor von A^{-1} zum Eigenwert $1/\lambda$.

Berechnung:

A ist genau dann invertierbar, wenn $\det(A) \neq 0$.

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{\det(A)}$$

oder: $[A | J] \xrightarrow{\text{Umformen}} [J | A^{-1}]$

↳ Diagonalmatrix invertieren:

$$\text{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})^{-1} = \text{diag}(\frac{1}{a_{11}}, \dots, \frac{1}{a_{nn}})$$

↳ Unitäre Matrix invertieren:

$$U^{-1} = U^T = U^H$$

Adjunkte Matrix

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} \det(\tilde{A}_{1,1}) \cdot (-1)^{1+1} & \dots & \det(\tilde{A}_{1,n}) \cdot (-1)^{1+n} \\ \vdots & & \vdots \\ \det(\tilde{A}_{n,1}) \cdot (-1)^{n+1} & \dots & \det(\tilde{A}_{n,n}) \cdot (-1)^{n+n} \end{pmatrix} := B$$

$$b_{i,j} = \det(\tilde{A}_{i,j}) \cdot (-1)^{i+j}$$

$\tilde{A}_{i,j}$: i-te Zeile und j-te Spalte weglassen!

$\begin{matrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \end{matrix}$

• $\text{adj}(A^{-1}) = \text{adj}(A)^{-1}$ • $\text{adj}(\text{adj}(A)) = \det(A)^{n-2} \cdot A$ • $\text{adj}(A^T) = \text{adj}(A)^T$

• $A \cdot \text{adj}(A) = \text{adj}(A) \cdot A = \det(A) \cdot J$ • $\text{adj}(\lambda \cdot A) = \lambda^{n-1} \cdot \text{adj}(A)$ • $\det(\text{adj}(A)) = \det(A)^{n-1}$

Eigenvektoren / Eigenwerte

Wenn $\vec{b} = A \cdot \vec{b} = \lambda \cdot \vec{b}$, also \vec{b} auf ein Vielfaches von sich selbst abgebildet wird, dann heißt \vec{b} Eigenvektor von A zum Eigenwert λ .

- Jedes Vielfache von \vec{b} ist ebenfalls Eigenvektor
 - Auch linear unabhängige EV können den gleichen EW haben (bei Vielfachheit von $\lambda > 1$)
- Daraus folgt, dass zu jedem EW ein Eigenvektorunterraum mit $\dim \geq 1$ existiert.

Berechnung:

Die Gleichung $\det(A - \lambda \cdot J) = 0 \Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} = 0$

heißt charakteristisches Polynom von A . Ihre Lösungsmenge, also die Nullstellen, sind die EW $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Der EV-Unterraum zu einem EW λ_i ist die Lösungsmenge des Systems

$$(A - \lambda_i \cdot J) \cdot \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ a_{11}-\lambda_i & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn}-\lambda_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

\Rightarrow Sei λ_i ein EW der Vielfachheit m , so ist $\dim(EV_i) \leq m$. Es existieren maximal m linear unabhängige EV zu λ_i .

$\Rightarrow A_{n \times n}$ besitzt genau n komplexe EW, wobei einige davon mehrfach vorkommen können

\Rightarrow Die EV zu verschiedenen EW sind linear unabhängig.

\Rightarrow Ist λ ein EW von A , so ist auch $\bar{\lambda}$ ein EW von A .

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{k=1}^n a_{kk} \quad \Rightarrow \prod_{i=1}^n \lambda_i = \det(A)$$

\Rightarrow Existiert der EW $\lambda_i = 0$, so ist $\ker(A) = EV_i$. $\det(A)$ ist in diesem Fall 0.

\Rightarrow Ähnliche Matrizen besitzen gleiche Eigenvektoren

\Rightarrow EV und EW einer hermiteschen Matrix: Sei H hermitesch (symmetrisch in \mathbb{R}^n).

\Rightarrow Alle EW von H sind reell.

\Rightarrow Sei λ_i ein EW der Vielfachheit m , so ist $\dim(EV_i) = m$

\Rightarrow Die EV zu verschiedenen EW sind orthogonal.

\Rightarrow Es existiert eine Orthonormalbasis aus EV von H

Ähnliche Matrizen

Seien $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$, so heißen A und B ähnlich (zueinander), falls eine invertierbare Matrix $T \in \mathbb{K}^{n \times n}$ existiert, sodass $A = T^{-1} \cdot B \cdot T \Leftrightarrow B = T \cdot A \cdot T^{-1}$. Dabei ist T die Koordinatentransformation, die die Ausgangskoordinaten von A in die Basis von B transformiert. Nun erfolgt eine Abbildung in der Basis von B und das Ergebnis wird mit T^{-1} wieder in die Basis von A abgebildet.

A heißt diagonalähnlich / diagonalisierbar, wenn eine invertierbare Matrix T existiert, sodass $D = T^{-1} \cdot A \cdot T \Leftrightarrow A = T \cdot D \cdot T^{-1}$, wobei D eine Diagonalmatrix ist.

- Existiert eine Basis aus Eigenvektoren von A , so ist A diagonalisierbar und man erhält ein T und ein D , indem man A in der EV-Basis darstellt:

$$T = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n) \quad D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad \text{mit } \vec{b}_i \text{ als EV zum EW } \lambda_i$$

\Rightarrow Hermitesche Matrizen sind diagonalisierbar. Tipp: wählt man $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$ als Orthonormalbasis, so ist $T^{-1} = \overline{T}^T \leftarrow$ siehe Unitäre Matrix

Wurzel einer Matrix

A heißt eine Wurzel von B , wenn $A^2 = A \cdot A = B$. Falls B eine Diagonalmatrix ist, so gilt:

$$A = \begin{pmatrix} \pm \sqrt{b_{11}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \pm \sqrt{b_{nn}} \end{pmatrix} \Rightarrow -A \text{ ist ebenfalls eine Wurzel.}$$

$$\Rightarrow \text{Ist } B \text{ diagonalisierbar, so gilt: } B = T \cdot D \cdot T^{-1} \quad B^{1/2} = T \cdot D^{1/2} \cdot T^{-1}$$

\rightarrow Bei oberen oder unteren Dreiecksmatrizen sind die EW die Diagonalelemente. Achtung: Durch die Rechenschritte des Gauss-Algorithmus ändern sich die EW! Dreiecksmatrix kann mit QR-Verf. erzeugt werden.

$\Rightarrow \lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k$ sind die EW von $A^k, k \in \mathbb{N}$. Ist A invertierbar, so ist k sogar $\in \mathbb{Z}$, also $\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}$ sind die EW der inversen Matrix A^{-1} .

Norm

Seien A, B Zahlen, Vektoren oder Matrizen und $\alpha \in \mathbb{C}$, dann muss eine Norm $\|\cdot\|$ definitionsgemäß die drei folgenden Eigenschaften erfüllen:

- 1. aus $\|A\| = 0$ folgt $A = 0$
- 2. $\|\alpha \cdot A\| = |\alpha| \cdot \|A\|$
- 3. $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$ (Dreiecksungleichung)

Zahlennorm:
Die Norm einer Zahl $z \in \mathbb{C}$ ist stets als der Betrag dieser Zahl definiert: $\|z\| = |z|$

Vektornorm:

$$\|\vec{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Für Vektoren ist eine p-Norm wie folgt definiert:
Im Falle von $p=1$ spricht man von der *Summennorm*, im Falle von $p=2$ von der *euklidischen Norm*, welche der Standardfall ist. Der Grenzwert $p \rightarrow \infty$, $\|\vec{x}\|_\infty = \max_{i=1..n} |x_i|$ ist die *Maximumsnorm*.
Es gilt: Aus $1 \leq p < q \leq \infty$ folgt $\|\vec{x}\|_q \leq \|\vec{x}\|_p$

Matrixnorm:

Daraus folgt:

Für Matrizen können Normen durch Vektornormen wie folgt induziert werden (*Natürliche Matrixnorm*):

$$\|A\|_1 = \max_{j=1..n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$
 (Zeilensummenorm, induziert durch $\|\vec{x}\|_1$)
$$\|A\|_2 = \sqrt{(\max EW(A)) \cdot A^T \cdot A}$$
 (Spektralnrm, induziert durch $\|\vec{x}\|_2$)
$$\|A\|_\infty = \max_{i=1..n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$
 (Spaltensummenorm, induziert durch $\|\vec{x}\|_\infty$)

$$\|A\| = \max_{\vec{x} \neq \vec{0}} \frac{\|A \cdot \vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} = \max_{\|\vec{x}\|=1} \|A \cdot \vec{x}\|$$

Die induzierten Matrixnormen erfüllen die beiden zusätzlichen Eigenschaften:

- $\|A \cdot \vec{x}\| \leq \|A\| \cdot \|\vec{x}\|$ (Verträglichkeitsbedingung)
- $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ (Submultiplikativität)

Unitäre (orthogonale) Matrix
A ist genau dann unitär, wenn $A \cdot A^H = A^H \cdot A = I$ $A^H = \bar{A}^T$ ist die hermitesche Transponierte.
↳ Orthogonale Matrizen ($A^T \cdot A = I$) sind Unitär im \mathbb{R}^n .
Unitäre Matrizen sind Drehungen oder Spiegelungen. Ihre Basisvektoren bilden eine Orthonormalbasis.
↳ $\det(A) = \pm 1$; $+1$ bei Drehung; -1 bei Spiegelung
• Seien A und B unitäre Matrizen:
⇒ $A \cdot B$ ist unitär ⇒ A^{-1} ist unitär ⇒ $\langle A \cdot \vec{x}, A \cdot \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ ⇒ A ist winkel- und längen- treu
⇒ A ist diagonalisierbar ⇒ Alle Eigenwerte von A haben den Betrag 1 ($|a_i| = 1 \forall i=0..n$)
↳ Im Falle einer Drehung ist $\text{Im}(a_i) \neq 0$ (außer bei 0°)
↳ **Orthonormalbasis:** Eine Basis $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$ ist genau dann orthonormal, wenn:
 $\langle \vec{b}_i, \vec{b}_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{für } i=j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases} \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$

Gram-Schmidt'sches Orthogonalisierungsverfahren
Wandelt eine Basis aus Vektoren in eine Orthogonalbasis um. Beim Orthonormalisieren auch in eine Orthonormalbasis.
Seien $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$ die Vektoren der Ausgangsbasis. Nun gilt für die ONB:
 $\vec{e}_1 = \frac{\vec{b}_1}{\|\vec{b}_1\|}$ $\vec{e}_2 = \frac{\vec{b}_2 - \langle \vec{b}_2, \vec{e}_1 \rangle \cdot \vec{e}_1}{\|\vec{e}_2'\|}$ $\vec{e}_3 = \frac{\vec{b}_3 - \langle \vec{b}_3, \vec{e}_1 \rangle \cdot \vec{e}_1 - \langle \vec{b}_3, \vec{e}_2 \rangle \cdot \vec{e}_2}{\|\vec{e}_3'\|}$ usw.
 $\vec{e}_k' = \vec{b}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle \vec{b}_k, \vec{e}_i \rangle \cdot \vec{e}_i$ $\vec{e}_k = \begin{cases} \vec{e}_k' & \text{für Orthogonalbasis (keine Veränderung)} \\ \frac{\vec{e}_k'}{\|\vec{e}_k'\|} & \text{für Orthonormalbasis (normieren)} \end{cases}$

Hermitesche (symmetrische) Matrix
A heißt hermitesch, wenn: $A = A^H \Leftrightarrow a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ $A^H = \bar{A}^T$ ist die hermitesche Transponierte
↳ Symmetrische Matrizen ($A=A^T$) sind hermitesch im \mathbb{R}^n
↳ Die Elemente der Hauptdiagonalen sind reell
↳ Hermitesche Matrizen sind normal ($A \cdot A^H = A^H \cdot A$)
↳ Es existiert eine unitäre Matrix U, sodass $A = U \cdot D \cdot U^H = U \cdot D \cdot U^{-1}$, wobei D eine Diagonalmatrix ist. Folglich besteht U aus den Eigenvektoren und D aus den Eigenwerten von A. ⇒ Es existiert eine ONB aus Eigenvektoren von A; A ist diagonalisierbar; Alle Eigenwerte von A sind reell
• Seien A und B hermitesch.
↳ $A+B$ ist hermitesch $\Leftrightarrow A \cdot B$ ist hermitesch, wenn A & B kommutieren $\Leftrightarrow \det(A)$ ist reell
↳ Alle Hauptminoren von A sind hermitesch $A \cdot B = B \cdot A$
S heißt schief hermitesch, falls $S = -S^H \Leftrightarrow s_{ij} = -\overline{s_{ji}}$
↳ Für jede quadratische Matrix A existiert eine hermitesche Matrix A und eine schiefhermitesche Matrix B, sodass $A = A + B$
↳ $i \cdot S$ ist hermitesch.
↳ **Selbstadjungierte Matrix** A heißt selbstadjungiert, falls: $\langle A \cdot \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, A \cdot \vec{y} \rangle \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^n$
• hermitesche Matrizen sind selbstadjungiert und umgekehrt.

Definitheit
Sei A eine hermitesche Matrix. A ist:
• positiv definit, wenn $\vec{x}^H \cdot A \cdot \vec{x} > 0 \Leftrightarrow$ Alle EW > 0
• positiv semidefinit, wenn $\vec{x}^H \cdot A \cdot \vec{x} \geq 0 \Leftrightarrow$ Alle EW ≥ 0
Bei Hermiteschen Matrizen sind alle EW reell und dieser Vergleich ist möglich! **Hurwitz Kriterium:** A ist positiv (semi)definit, wenn die Determinanten aller führenden Hauptminoren $> (\geq) 0$ sind.
 $\det(A_1) > 0 \quad \det(A_2) \geq 0 \quad \det(A_3) > 0 \dots$

Definitheit

Sei A eine hermitesche Matrix und x~ ein beliebiger Vektor, dann ist die Definitheit von A wie folgt definiert:

- A heißt *positiv definit*, wenn x~^H · A · x~ > 0 → alle EW von A > 0
- A heißt *positiv semidefinit*, wenn x~^H · A · x~ ≥ 0 → alle EW von A ≥ 0
- A heißt *negativ definit*, wenn x~^H · A · x~ < 0 → alle EW von A < 0
- A heißt *negativ semidefinit*, wenn x~^H · A · x~ ≤ 0 → alle EW von A ≤ 0
- A heißt *indefinit*, wenn sowohl positive als auch negative EW existieren.

Hurwitzkriterium:
A ist positiv (semi)definit, wenn die Determinanten aller führenden Hauptminoren > (≥) 0 sind.

det(A~_1) > 0, det(A~_2) > 0, det(A~_3) > 0, ... → positiv definit
det(A~_1) < 0, det(A~_2) > 0, det(A~_3) < 0, ... → negativ definit

Dieser Vergleich ist möglich, weil bei hermiteschen Matrizen alle EW reell sind.

Alternierende Vorzeichen bei negativer Definitheit.

Wenn A positiv (semi)definit ist, dann ist -A negativ (semi)definit und umgekehrt.

Cholesky-Verfahren:

Wenn A positiv definit ist, dann existiert genau eine untere Dreiecksmatrix L mit L · L^T = A und positiven Diagonaleinträgen l_ii > 0. Für L gilt: für j = 1..n { l_jj^2 = a_jj - sum_{k=1}^{j-1} l_jk^2 falls l_jj^2 ≤ 0 STOP: A ist nicht positiv definit! sonst l_jj = sqrt(l_jj^2) ; für i = j+1..n { l_ij = a_ij - sum_{k=1}^{j-1} l_ik · l_jk } }

Es gilt: |l_ij| ≤ sqrt(a_ii) für i = 1..n; j ≤ i. Das Cholesky-Verfahren ist gleichzeitig der schnellste Test auf positive Definitheit.

Lineare Gleichungssysteme

Ein lineares Gleichungssystem kann als Matrix wie folgt dargestellt werden: A · x~ = b~. Es ist genau dann eine Lösung, wenn rang(A) = rang(A, b~). A ist demnach quadratisch, beide Vektoren und A haben die gleiche Dimension.

Gauß-Algorithmus:

Beim Gaußschen Eliminationsverfahren wird eine Lösung x~ ermittelt. Dafür werden A und b zusammengehängt und eine obere (oder untere) Dreiecksmatrix erzeugt. Für die Erzeugung einer oberen Dreiecksmatrix werden nach einander die Untermatrizen A~_1, ..., A~_n betrachtet. Jede Untermatrix A~_k wird nun durch lineare Rechenoperationen auf dem gesamten System (A,b) so umgewandelt, dass der erste Spaltenvektor von A~_k Null wird, bis auf das erste Element a~_k,11 (*Pivot-Element*). Dafür muss ein Pivot-Element a~_k,11 ≠ 0 gewählt werden, indem Zeilen (oder Spalten) des Systems vertauscht werden.

Um Rundungsfehler zu minimieren sollte a~_k,11 = max_{i=1..m} a~_k,i1

(*Spaltenpivotsuche*) bzw. a~_k,11 = max_{i=1..m; j=1..m} a~_k,ij (*Vollständige Pivotsuche*)

gewählt werden (m = n+1-k ist die Dimension von A~_k). Vollständige Pivotsuche ist genauer, jedoch müssen dafür auch Spaltenvektoren vertauscht werden, was zu einer Umsortierung der Elemente von x~ führt. Ist a~_k,11 = 0 (trotz Pivotsuche), so existiert keine oder keine eindeutige Lösung für x~. Um die übrigen Elemente des ersten Spaltenvektors von A~_k zu nullen, kann wie neben zusehen vorgegangen werden. Die ermittelten Faktoren l_ij können in einer Matrix L oder besser anstelle der entstehenden Nullen gespeichert werden. Für L und die übrigbleibende Matrix R := A' gilt nun: L · R = P · A · Q. Hier ist R die berechnete, obere Dreiecksmatrix mit den Pivot-Elementen auf der Hauptdiagonalen, L eine untere Dreiecksmatrix aus den ermittelten Faktoren und Einsen auf der Hauptdiagonalen, P die Permutationsmatrix der Zeilenvektoren und Q die Permutationsmatrix der Spaltenvektoren (Q = I bei Spaltenpivotsuche). Die Lösung x~ = Q^-1 · x' = Q^T · x' ergibt sich nun aus der Rückwärtssubstitution. Das Speichern von L hat den Vorteil, dass nun b' aus b berechnet werden kann, durch Vorwärtssubstitution. Somit kann das System mit wenig Rechenaufwand für eine andere, rechte Seite b~ erneut gelöst werden. Bei Spalten- oder vollständiger Pivotsuche ist |l_ij| ≤ 1.

	x_1	x_2	x_3	x_4	
a_11	a_12	a_13	a_14		b_1
a_21	a_22	a_23	a_24		b_2
a_31	a_32	a_33	a_34		b_3
a_41	a_42	a_43	a_44		b_4

A~_1 A~_2 A~_3

	x_1	x_2	x_3	x_4	
a_11	a_12	a_13	a_14		b_1
0	a_22	a_23	a_24		b_2
0	a_32	a_33	a_34		b_3 = III - l_32/a_22 · II
0	a_42	a_43	a_44		b_4 = IV - l_42/a_22 · II

l_32 l_42

Rückwärtssubstitution:

b'_k - sum_{i=k+1}^n r_ki · x'_i

x'_k = (b'_k - sum_{i=k+1}^n r_ki · x'_i) / r_kk

Zur Berechnung mit k = n beginnen!

Vorwärtssubstitution:

b'_k - sum_{i=1}^{k-1} l_ki · b'_i

b'_k = (b'_k - sum_{i=1}^{k-1} l_ki · b'_i) / l_kk

Zur Berechnung mit k = 1 beginnen!

Falls A hermitesch und positiv definit ist, kann die LR-Zerlegung mit Hilfe des Cholesky-Verfahrens durchgeführt werden, welches im Vergleich zum gaußschen Eliminierungsverfahren nur halb so rechenaufwändig ist.

Störung linearer Gleichungssysteme:

Sei A eine invertierbare nxn-Matrix und ||·|| eine induzierte Matrixnorm, dann heißt $cond(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ die **Konditionszahl** von A bezüglich der Matrixnorm. Diese beschreibt die Sensitivität bezüglich Störungen ΔA, Δb.

Das ursprüngliche Gleichungssystem wird nun wie folgt gestört: $A \cdot \vec{x} = \vec{b} \rightarrow (A + \Delta A) \cdot \vec{\tilde{x}} = \vec{b} + \Delta \vec{b}$ mit $b \neq 0, \|\Delta A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$ und beliebiger Matrixnorm, dann gilt:

$$\frac{\|\vec{\tilde{x}} - \vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} \leq \frac{cond(A)}{1 - cond(A) \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}} \cdot \left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \right)$$

Maschinenengenauigkeit:
 Bei der Rechnung mit Floatingpoint-Werten wird die Genauigkeit mit $\epsilon = 2^{-n_m - 1}$ angegeben, mit n_m als die Anzahl signifikanter Binärstellen in der Mantisse; -1, weil Fehler höchstens halb so groß
 Das Ergebnis der LR-Zerlegung ist in der Praxis fehlerhaft (\bar{L}, \bar{R}), ist, wie die kleinste, darstellbare Differenz.

sodass gilt: $\bar{L} \cdot \bar{R} = P \cdot A \cdot Q + F$ Dabei ist F die Fehlermatrix mit $|f_{ij}| \leq 2 \cdot j \cdot \bar{a} \cdot \frac{\epsilon}{1 - \epsilon}$, $\bar{a} = \max_k \max_{i,j} |\tilde{a}_{k,ij}|$ wobei k die Nummer

der Pivotsuchenwiderholung ist. Umgekehrt lässt sich für das Näherungsergebnis \bar{x} schreiben: $(A + E) \cdot \bar{x} = \vec{b}$ mit Fehlermatrix E

und $|e_{ij}| \leq \frac{2 \cdot (n+1) \cdot \epsilon}{1 - n \cdot \epsilon} \cdot (|\bar{l}_{ij}| \cdot |\bar{r}_{ij}|) \leq \frac{2 \cdot (n+1) \cdot \epsilon}{1 - n \cdot \epsilon} \cdot n \cdot \bar{a}$ Für Spaltenpivotsuche gilt: $\bar{a} \leq \max_k 2^k \cdot \max_{i,j} |a_{ij}|$,

für vollständige Pivotsuche (Rote Ungleichung ist unbewiesen):

$$\bar{a} < \max_k (k+1) \cdot \max_{i,j} |a_{ij}| \leq \max_k \sqrt{k \cdot 2^1 \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot \dots \cdot k^{\frac{1}{k-1}}} \cdot \max_{i,j} |a_{ij}|$$

Tensoralgebra

Ein n-dimensionaler Tensor m-ter Stufe ordnet jedem Punkt im n-dim. Raum ein Tupel aus n^m Zahlen zu. Motivation der Tensoralgebra ist, bestimmte Gleichungen in einer Form (Hier Indexschreibweise / Ricci-Kalkül) ausdrücken zu können, die vom gewählten Koordinatensystem unabhängig ist. Solche invarianten (vom Koordinatensystem unabhängigen) Gleichungen heißen *Tensorkomponentengleichungen*. Mit der Algebra des Ricci-Kalküls können allerdings auch Tensorgleichungen formuliert werden, die nicht-Tensorkomponenten beinhalten oder vom Koordinatensystem abhängig sind.

Multiplikation

$$A_i{}^j \cdot B_{kl} = C_i{}^j{}_{kl} \quad \leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} \\ a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

Einstein'sche Summenkonvention

Wenn gleicher Index in einem Tensor eines Produkts unten und einem Tensor oben auftaucht, dann wird über diesen Index summiert:

$$A_{ij}{}^k \cdot B_l{}^i = C_j{}^k{}_l \text{ wobei } C_j{}^k{}_l = \sum_{i=1}^n A_{ij}{}^k \cdot B_l{}^i \text{ Die Summations-Operation heißt } \textit{Tensorkontraktion}$$

Die Indexposition im Divident des Differentialquotient en verhält sich außerhalb genau andersherum.

Die Vektor-Matrix-Multiplikation (Exemplarisch im ℝ³) lässt sich wie folgt in Tensorgleichungen überführen:

$$\vec{b} = \vec{a} \cdot M = a_1 \vec{M}_1 + a_2 \vec{M}_2 + a_3 \vec{M}_3 \rightarrow b_i = a_j \cdot M_i{}^j \text{ (wobei } \vec{M}_{1..3} \text{ die Spaltenvektoren von M sind)}$$

Die Matrix-Matrix-Multiplikation wie folgt: $A = B \cdot C \rightarrow A_i{}^j = B_i{}^k \cdot C_k{}^j$

Oftmals werden auch im Tensor-Kalkül Vektoren mit → gekennzeichnet. Der Vektorpfeil könnte im Prinzip als zusätzlicher Tensorindex (ob oben oder unten ist situationsabhängig) verstanden werden; wird jedoch nur verwendet, wenn die Komponenten dieses Vektors im kartesischen System liegen. Generell können die Indizes im Tensorkalkül frei gewählt werden und müssen entsprechend angepasst werden, wenn ein Term in einen anderen Eingesetzt wird, um keine ungewollte Summation auszulösen.

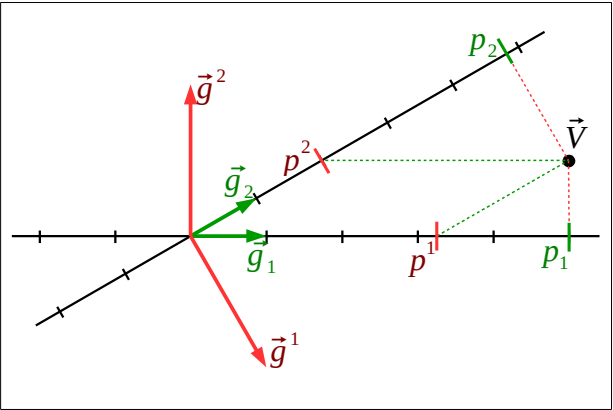
Dualraum

Die Darstellung der Indizes oben (=kontravariant) und unten (=kovariant) geht auf den Dualraum zurück. Dabei gibt es zwei äquivalente Beschreibungen eines Vektors. Der Unterschied wird in nicht-orthogonalen Vektorräumen deutlich. Die kovarianten Basisvektoren zeigen in Richtung der Koordinatenachsen. Jeder kontravariante Basisvektor \vec{g}^i steht senkrecht auf allen kovarianten Basisvektoren $\vec{g}_j, j \neq i$.

Ein Vektor \vec{V} lässt sich nun auf zwei Arten darstellen: $\vec{V} = V^i \cdot \vec{g}_i = V_j \cdot \vec{g}^j$

Eine Vektoraddition $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ kann ko- und kontravariant erfolgen:

$$C_i = A_i + B_i \leftrightarrow C^i = A^i + B^i \text{ Für die Länge eines Vektors gilt:}$$



$\|\vec{V}\| = \sqrt{V_i \cdot V^i}$ Projiziert man den Vektorpunkt \vec{V} in Richtung der kontravarianten Basisvektoren auf die Koordinatenachsen (aufgrund der Orthogonalität der kontravarianten Vektoren zu den Achsen entspricht dies dem Skalarprodukt mit dem kovarianten Basisvektor), so erhält man die kovarianten Komponenten des Punktvektors: $V_i = \vec{V} \cdot \vec{g}_i$ umgekehrt gilt $V^i = \vec{V} \cdot \vec{g}^i$

Metrischer Tensor

Der *metrische Tensor* dient zum Umrechnen zwischen ko- und kontravarianten Größen. Durch Einsetzen von \vec{V} in V_i aus dem Abschnitt Dualraum kann man schreiben: $V_i = (V^j \cdot \vec{g}_j) \cdot \vec{g}_i = V^j \cdot (\vec{g}_i \cdot \vec{g}_j) = V^j \cdot g_{ij}$ Aus $g_{ij} = \vec{g}_i \cdot \vec{g}_j$ folgt, das der metrische Tensor symmetrisch und positiv definit ist. Äquivalent gilt für den kontravarianten, metrischen Tensor: $g^{ij} = \vec{g}^i \cdot \vec{g}^j$ Die doppelte Transformation (also hin und zurück) muss wieder den Ausgangswert liefern: $V^j = g^{ij} \cdot V_i \rightarrow V_i = g_{ki} \cdot g^{ij} \cdot V_j \rightarrow g_{ki} \cdot g^{ij} = \delta_k^j \leftrightarrow g^{ij} = (g_{ki})^{-1}$ Wobei δ die Einheitsmatrix (Kronecker-Delta ist)

Auch die Basisvektoren(tupel) lassen sich transformieren: $\vec{g}^i = g^{ij} \cdot \vec{g}_j \rightarrow \vec{g}_i = g_{ij} \cdot \vec{g}^j$ Nun lässt sich aus bekannter, kovarianter Basis die kontravariante Basis berechnen und umgekehrt.

Krummlinige Koordinaten

In krummlinigen Koordinatensystemen sind die Basisvektoren \vec{g}_i ortsabhängig. Zwischen den kartesischen Koordinaten x_i und den krummlinigen Koordinaten des anderen Systems θ_i gibt es Transformationsvorschriften der Form: $x^i = f_i(\theta^1, \dots, \theta^n)$ Die

Basisvektoren ergeben sich nun zu: $\vec{g}_k = \frac{\partial x^i}{\partial \theta^k} \vec{e}_i \quad \vec{g}^i = \frac{\partial \theta^i}{\partial x^k} \vec{e}_k$ wobei \vec{e}_i die Basisvektoren der kartesischen Koordinaten sind.

\vec{g}_i Zeigen in jedem Punkt in tangentielle Richtung der Koordinatenachse θ_i ; \vec{g}_k in normale Richtung zu θ_k .

Koordinatentransformation

Analog zu den Formeln aus dem Abschnitt Dualraum können Tensorkomponenten nicht nur zwischen kartesischen – und krummlinigen Koordinaten, sondern auch zwischen zwei verschiedenen krummlinigen Systemen θ_i , $\bar{\theta}_i$ transformiert werden. Die

Transformationskoeffizienten ergeben sich zu: $\bar{a}_k^l = \frac{\partial \theta^l}{\partial \theta^k} \quad \underline{a}_k^l = \frac{\partial \theta^l}{\partial \theta^k}$ wobei $\bar{a}_k^l \cdot \underline{a}_l^i = \delta_k^i$

Transformation	kovariant	kontravariant
Vektorkomponenten	$V_k = \bar{a}_k^l \cdot \bar{V}_l \quad \bar{V}_k = \underline{a}_k^l \cdot V_l$	$V^k = \underline{a}_l^k \cdot \bar{V}^l \quad \bar{V}^k = \bar{a}_l^k \cdot V^l$
Basisvektoren	$\vec{g}_k = \bar{a}_k^l \cdot \vec{\bar{g}}_l \quad \vec{\bar{g}}_k = \underline{a}_k^l \cdot \vec{g}_l$	$\vec{g}^k = \underline{a}_l^k \cdot \vec{\bar{g}}^l \quad \vec{\bar{g}}^k = \bar{a}_l^k \cdot \vec{g}^l$
Metrikoeffizienten	$g_{ik} = \bar{a}_i^l \cdot \bar{a}_k^m \cdot \bar{g}_{lm} \quad \bar{g}_{ik} = \underline{a}_i^l \cdot \underline{a}_k^m \cdot g_{lm}$	$g^{ik} = \underline{a}_l^i \cdot \underline{a}_m^k \cdot \bar{g}^{lm} \quad \bar{g}^{ik} = \bar{a}_l^i \cdot \bar{a}_m^k \cdot g^{lm}$

Differentialoperatoren

Um die Differentialoperatoren im Tensorkalkül zu schreiben, ist es hilfreich, sogenannte *Christoffel Symbole* einzuführen, sodass gilt:

$$\frac{\partial \vec{g}_k}{\partial \theta^l} = \Gamma_{kl}^m \cdot \vec{g}_m \quad \text{daraus folgt:} \quad \Gamma_{kl}^m = \frac{\partial^2 x^i}{\partial \theta^k \partial \theta^l} \frac{\partial \theta^m}{\partial x^i} = \frac{1}{2} \cdot g^{im} \cdot \left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial \theta^l} + \frac{\partial g_{il}}{\partial \theta^k} - \frac{\partial g_{lk}}{\partial \theta^i} \right)$$

$$\text{div } \vec{V} = \frac{\partial V^k}{\partial \theta^k} + V^k \cdot \Gamma_{kl}^l = \frac{1}{\sqrt{|g_{ik}|}} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta^k} (\sqrt{|g_{ik}|} \cdot V^k) \quad \text{div}(a^{ik}) = \frac{\partial a^{ik}}{\partial x^i} \cdot \vec{e}_k$$

$$\Delta \Phi = \frac{1}{\sqrt{|g_{ik}|}} \frac{\partial}{\partial \theta^k} \left(\sqrt{|g_{ik}|} \cdot g^{ki} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \theta^i} \right) \quad \text{grad } \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \theta^k} \cdot \vec{g}^k$$

$$\text{rot } \vec{V} = e^{kli} \cdot \frac{\partial V_i}{\partial \theta^l} \cdot \vec{g}_k \quad \text{mit dem Spatprodukt} \quad e^{kli} = \vec{g}^k \cdot (\vec{g}^l \times \vec{g}^i) \quad \text{wobei} \quad e^{kli} = e^{ikl} = e^{lik} = -e^{lki} = -e^{kil} = -e^{ilk}$$

Spezielle Relativitätstheorie

In der speziellen Relativitätstheorie werden konstant bewegte Systeme betrachtet. Der Einfluss der Schwerkraft wird vernachlässigt. Daher werden im Folgenden zwei kartesische Inertialsysteme betrachtet, die zum Zeitpunkt $t = 0$ übereinander liegen und $\bar{\theta}^i$ bewegt sich in θ^i mit Geschwindigkeit v in θ^3 -Richtung.

Der Einfachheit halber wird θ^i substituiert: $\theta^1 = x \quad \theta^2 = y \quad \theta^3 = z \quad \theta^4 = j \cdot c_0 \cdot t \quad (\bar{\theta}^i \text{ äquivalent})$

Für die Transformation ergibt sich: $\bar{\theta}^i = \bar{a}^i_k \cdot \theta^k$ $\hat{=}$

$$\begin{pmatrix} \bar{\theta}^1 \\ \bar{\theta}^2 \\ \bar{\theta}^3 \\ \bar{\theta}^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & j \frac{v}{c_0} \cdot \gamma \\ 0 & 0 & -j \frac{v}{c_0} \cdot \gamma & \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \theta^1 \\ \theta^2 \\ \theta^3 \\ \theta^4 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}}}$$

Daraus folgt: $\bar{x} = x \quad \bar{y} = y \quad \bar{z} = \frac{z - v \cdot t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}}} \quad \bar{t} = \frac{t - \frac{v}{c_0^2} \cdot z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}}}$

so gilt: $\sum_{i=1}^4 (\theta^i)^2 = \sum_{i=1}^4 (\bar{\theta}^i)^2 = 0$

Häufig wird auch der Faktor $\beta = \frac{v}{c_0}$ verwendet.

Die Rücktransformation ist identisch bis auf $\underline{a}^3_4 = -\bar{a}^3_4 = \underline{a}^4_3 = -\bar{a}^4_3$

Ein *Event* beschreibt die Ausbreitung einer Kugelwelle von einem bestimmten Ort (zu einer bestimmten Zeit). Da dies mit Lichtgeschwindigkeit passiert, sieht die Kugelwelle in allen Bezugssystemen gleich aus. So können Events E_1 im Ursprung von $\bar{\theta}_i$ zum

Zeitpunkt $\bar{t} = -\frac{\Delta \bar{t}}{2}$ und E_2 zum Zeitpunkt $\bar{t} = +\frac{\Delta \bar{t}}{2}$ passieren um die gleiche Entfernung zum Ursprung von θ_i zu haben. Dann

beträgt die *Zeitdilatation*, mit der E_1 und E_2 den Ursprung von θ_i erreichen $\Delta t = \Delta \bar{t} \cdot \gamma$. Die *Lorentzkontraktion* ergibt sich zu

$\Delta z = \frac{\Delta \bar{z}}{\gamma}$ Die Zeit vergeht in jedem Inertialsystem unterschiedlich schnell. Jedoch lässt sich für jedes Teilchen eine *Eigenzeit* τ

definieren sodass gilt: $d\tau = dt \cdot \sqrt{1 - \frac{u^2}{c_0^2}} = d\bar{t} \cdot \sqrt{1 - \frac{\bar{u}^2}{\bar{c}_0^2}}$ wobei $\frac{d\bar{t}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(t - \frac{v}{c_0^2} \cdot z \right) \cdot \gamma = \frac{d}{dt} \left(t - \frac{v}{c_0^2} \cdot \int u_z dt \right) \cdot \gamma = \left(1 - \frac{v \cdot u_z}{c_0^2} \right) \cdot \gamma$

Die Eigenzeit ist das Alter des Teilchens, also die Zeit, die in demjenigen Bezugssystem herrscht, in dem das Teilchen in Ruhe ist. u ist die totale Geschwindigkeit des Teilchens im entsprechenden Bezugssystem. Geschwindigkeiten transformieren sich wie folgt:

$$\bar{u}_\perp = \frac{\bar{u}_\perp}{1 - \frac{v \cdot u_\parallel}{c_0^2}} \cdot \frac{1}{\gamma} \quad \bar{u}_\parallel = \frac{u_\parallel - v}{1 - \frac{v \cdot u_\parallel}{c_0^2}} \quad \text{wobei} \quad u_\parallel = u_z \text{ die Geschwindigkeit in } \bar{\theta}_i\text{-Bewegungsrichtung (hier z) ist und}$$
$$\bar{u}_\perp \text{ die Geschwindigkeit orthogonal zur Bewegungsrichtung.}$$

Invariante Größen

Invariante 4-er Vektoren werden fett geschrieben.

- Eigenzeit τ (Wie oben)
- Ruhemasse m_0
- Ladung Q
- Ortsvektor $\vec{S} = \theta^i \cdot \vec{g}_i = \bar{\theta}^i \cdot \vec{g}_i$
- Geschwindigkeit $\vec{u} = \frac{d\vec{s}}{d\tau} = \frac{d\vec{s}}{dt} \frac{dt}{d\tau} \quad \vec{u} \cdot \vec{u} = -c_0^2$
- Impuls $\vec{p} = m_0 \cdot \vec{u} \quad \vec{p} \cdot \vec{p} = -m_0^2 \cdot c_0^2$

Feldtheorie

Maxwellgleichungen für ruhende Medien

Integrale Form:

$$\int_{\partial A} \vec{E}(\vec{x},t) \cdot d\vec{s} = - \int_A \frac{\partial \vec{B}(\vec{x},t)}{\partial t} \cdot d\vec{n}_A$$

$$\int_{\partial A} \vec{H}(\vec{x},t) \cdot d\vec{s} = \int_A \left(\frac{\partial \vec{D}(\vec{x},t)}{\partial t} + \vec{J}(\vec{x},t) \right) \cdot d\vec{n}_A$$

$$\int_{\partial V} \vec{D}(\vec{x},t) \cdot d\vec{n}_{\partial V} = \int_V \rho(\vec{x},t) dV$$

$$\int_{\partial V} \vec{B}(\vec{x},t) \cdot d\vec{n}_{\partial V} = 0$$

Mit A : einfach zusammenhängende Fläche, dñ : infinitesimale Flächennormale, dŝ : infinitesimale Wegtangente, V : einfach zusammenhängendes Volumen

Kontinuitätsgleichung

$$\operatorname{div}(\vec{J}(\vec{x},t)) = - \frac{\partial \rho(\vec{x},t)}{\partial t}$$

Materialbeziehungen

Allgemein:

$$\vec{D}(\vec{x},t) = \epsilon_0 \cdot \vec{E}(\vec{x},t) + \vec{P}(\vec{x},t)$$

$$\vec{H}(\vec{x},t) = \frac{1}{\mu} \cdot \vec{B}(\vec{x},t) - \vec{M}(\vec{x},t)$$

$$\vec{J}(\vec{x},t) = \vec{\kappa}(\vec{x},t) \cdot \vec{E}(\vec{x},t)$$

Mit P̄ : Polarisisation, M̄ : Magnetisierung

lineare Medien

$$\vec{D}(\vec{x},t) = \epsilon_0 \cdot \vec{\epsilon}_r(\vec{x}) \cdot \vec{E}(\vec{x},t)$$

$$\vec{B}(\vec{x},t) = \mu_0 \cdot \vec{\mu}_r(\vec{x}) \cdot \vec{H}(\vec{x},t)$$

$$\vec{J}(\vec{x},t) = \vec{\kappa}(\vec{x}) \cdot \vec{E}(\vec{x},t)$$

Oft werden ε0 und εr bzw. μ0 und μr zusammengefasst

lineare, isotrope Medien

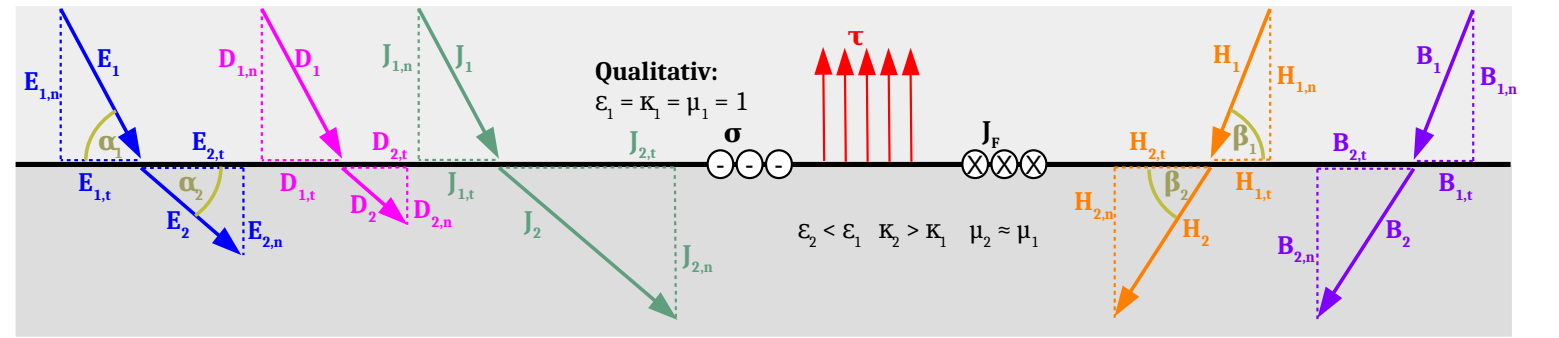
$$\vec{D}(\vec{x},t) = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r(\vec{x}) \cdot \vec{E}(\vec{x},t)$$

$$\vec{B}(\vec{x},t) = \mu_0 \cdot \mu_r(\vec{x}) \cdot \vec{H}(\vec{x},t)$$

$$\vec{J}(\vec{x},t) = \kappa(\vec{x}) \cdot \vec{E}(\vec{x},t)$$

Im Falle homogener Medien sind εr, μr, κ zusätzlich von x̄ unabhängig.

Rand- und Stetigkeitsbedingungen



$\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$ $E_{2t} - E_{1t} = 0$	$\vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma$ $D_{2n} - D_{1n} = \sigma$	$\vec{n} \cdot (\vec{J}_2 - \vec{J}_1) = - \frac{\partial \sigma}{\partial t}$ $J_{2n} - J_{1n} = - \frac{\partial \sigma}{\partial t}$	$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{J}_F$ $H_{2t} - H_{1t} = J_F$	$\vec{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0$ $B_{2n} - B_{1n} = 0$
--	---	---	--	---

Brechungsgesetze:

E-Statik

$$\frac{\tan(\alpha_1)}{\tan(\alpha_2)} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} = \frac{D_{1,t}}{D_{2,t}} = \frac{E_{2,n}}{E_{1,n}}$$

J-Statik

$$\frac{\tan(\alpha_1)}{\tan(\alpha_2)} = \frac{\kappa_1}{\kappa_2} = \frac{J_{1,t}}{J_{2,t}} = \frac{E_{2,n}}{E_{1,n}}$$

B-Statik

$$\frac{\tan(\beta_1)}{\tan(\beta_2)} = \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{B_{1,t}}{B_{2,t}} = \frac{H_{2,n}}{H_{1,n}}$$

Kraft auf Grenzfläche:

$$-\vec{\tau} = \vec{n}_0 (w_2 - w_1 + \tau_{en} + \tau_{mn}) \quad (\text{vgl. Kraft im Elektromagnetismus})$$

Energie im Elektromagnetismus

$$W=\int_V \omega(\vec{x})dV \quad \text{mit} \quad \omega(\vec{x})=\omega_{El}(\vec{x})+\omega_M(\vec{x})=\int_0^{D_0} \|\vec{E}(\vec{D}(x))\|dD+\int_0^{B_0} \|\vec{H}(B(\vec{x}))\|dB$$

Energie

$$W = \int_V w(\vec{x}) dV \quad w(\vec{x}) = w_E(\vec{x}) + w_M(\vec{x}) = \int_0^{D(\vec{x})} \|\vec{E}(\vec{x}, D)\| dD + \int_0^{B(\vec{x})} \|\vec{H}(\vec{x}, B)\| dB$$

Für ϵ, μ linear, isotrop: $w_E(\vec{x}) = \frac{\epsilon}{2} \|\vec{E}(\vec{x})\|^2 \quad w_M(\vec{x}) = \frac{\mu}{2} \|\vec{H}(\vec{x})\|^2$

Poyntingscher Satz

Der Poyntingsche Satz beschäftigt sich mit Energieerhaltung und -transport in elektromagnetischen Feldern. Dafür wird die 2. Maxwellgl. mit \vec{H} , die zweite mit \vec{E} skalar multipliziert:

$$\langle \vec{H}, \text{rot}(\vec{E}) \rangle = \langle \vec{H}, -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \rangle; \quad \langle \vec{E}, \text{rot}(\vec{H}) \rangle = \langle \vec{E}, \vec{j} \rangle + \langle \vec{E}, \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \rangle$$

Subtraktion liefert:

$$\langle \vec{H}, \text{rot}(\vec{E}) \rangle - \langle \vec{E}, \text{rot}(\vec{H}) \rangle = \text{div}(\vec{E} \times \vec{H}) = -\langle \vec{E}, \vec{j} \rangle - \langle \vec{E}, \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \rangle - \langle \vec{H}, \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \rangle$$

Umordnung der Terme liefert den Alg. Poyntingschen Satz:

$$\langle \vec{H}(\vec{x}, t), \frac{\partial \vec{B}(\vec{x}, t)}{\partial t} \rangle + \langle \vec{E}(\vec{x}, t), \frac{\partial \vec{D}(\vec{x}, t)}{\partial t} \rangle = -\text{div}(\vec{E}(\vec{x}, t) \times \vec{H}(\vec{x}, t)) - \langle \vec{E}(\vec{x}, t), \vec{j}(\vec{x}, t) \rangle$$

Für lineare, isotrope Medien folgt der Poyntingvektor:

$$\vec{S}(\vec{x}, t) = \vec{E}(\vec{x}, t) \times \vec{H}(\vec{x}, t) \quad \text{und der Poyntingsatz lautet dann:}$$

integrale Form: $\frac{d}{dt} \int_V w(\vec{x}, t) dV = - \int_{\partial V} \langle \vec{S}(\vec{x}, t), d\vec{s} \rangle - \int_V \langle \vec{E}(\vec{x}, t), \vec{j}(\vec{x}, t) \rangle dV$

differenzielle Form: $\frac{\partial}{\partial t} w(\vec{x}, t) = -\text{div}(\vec{S}(\vec{x}, t)) - \langle \vec{E}(\vec{x}, t), \vec{j}(\vec{x}, t) \rangle$

Der Poynting-Satz beschreibt also, worauf Änderungen in der Energie (Dichte) zurückzuführen sind. Der Poynting-Vektor beschreibt den Energietransport durch EM-Wellen, $\langle \vec{E}, \vec{j} \rangle$ beschreibt Umwandlung von EM-Energie in Bewegungsenergie.

Fourier transformierter Poyntingscher Satz:

Bei äquivalenter Herleitung folgt für den Poyntingschen Satz im Frequenzbereich:

$$\text{div}(\vec{S}(\vec{x})) = -\frac{1}{2} \langle \vec{j}(\vec{x}), \vec{E}(\vec{x}) \rangle - i\omega \cdot 2 \cdot (\overline{w_M(\vec{x})} - \overline{w_E(\vec{x})}) \quad (\text{differenzielle Form})$$

$$\vec{S}(\vec{x}) = \frac{1}{2} \vec{E}(\vec{x}) \times \vec{H}(\vec{x}) \quad \overline{w_M(\vec{x})} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \mu \|\vec{H}(\vec{x})\|^2 \right) = \frac{\mu}{4} \langle \vec{H}, \vec{H} \rangle \quad \overline{w_E(\vec{x})} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \epsilon \|\vec{E}(\vec{x})\|^2 \right)$$

komplexer Poyntingvektor mittlere magnetisierte Energiedichte mittlere el. Energiedichte

integrale Form: $\int_{\partial V} \langle \vec{S}(\vec{x}), d\vec{s} \rangle = - \int_V \frac{1}{2} \kappa \|\vec{E}(\vec{x})\|^2 dV - 2i\omega \int_V (\overline{w_M(\vec{x})} - \overline{w_E(\vec{x})}) dV = -P - iQ = \int_V$

mit $\vec{j}(\vec{x}) = \kappa \cdot \vec{E}(\vec{x})$ (da Wirkleistung und Blindleistung bei nicht-skalarer κ nicht getrennt wären)

• Das Minus zwischen $\overline{w_M}$ und $\overline{w_E}$ zeigt, dass sich kapazitive und induktive Blindleistung aufheben.

• Das doppelte $1/2$ bei w_M und w_E kommt aus der Mittelwertbildung

Kraft im Elektromagnetismus

$\epsilon := \epsilon(\vec{x})$; $\mu := \mu(\vec{x})$; t wird nicht beachtet

Kraft auf Ladungen:

$$\vec{F}_e = Q \cdot \vec{E}$$

$$\vec{f}_e(\vec{x}) = \rho(\vec{x}) \cdot \vec{E}(\vec{x})$$

$$\vec{J}_e(\vec{x}) = \sigma(\vec{x}) \cdot \vec{E}(\vec{x})$$

Kraft auf (bewegte) Ladungen:

$$\vec{F}_m = Q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

$$\vec{f}_m(\vec{x}) = \vec{j}(\vec{x}) \times \vec{B}(\vec{x})$$

$$\vec{J}_m(\vec{x}) = \vec{J}_F(\vec{x}) \times \vec{B}(\vec{x})$$

$$\vec{f}_{(E)} = \rho(\vec{x}) \cdot \vec{E}(\vec{x}) + \vec{j}(\vec{x}) \times \vec{B}(\vec{x}) - \frac{1}{2} \|\vec{E}(\vec{x})\|^2 \cdot \text{grad}(\epsilon) - \frac{1}{2} \|\vec{H}(\vec{x})\|^2 \cdot \text{grad}(\mu)$$

Kraft durch Feldstärkung:

$$P_{\text{eff}} = -w_E(\vec{x}) - w_M(\vec{x})$$

• EM-Felder erzeugen einen negativen Druck

$$\mathcal{T}_E = \begin{pmatrix} \epsilon \cdot E_x^2 - \frac{1}{2} \epsilon E^2 & \epsilon \cdot E_x \cdot E_y & \epsilon \cdot E_x \cdot E_z \\ \epsilon \cdot E_y \cdot E_x & \epsilon \cdot E_y^2 - \frac{1}{2} \epsilon E^2 & \epsilon \cdot E_y \cdot E_z \\ \epsilon \cdot E_z \cdot E_x & \epsilon \cdot E_z \cdot E_y & \epsilon \cdot E_z^2 - \frac{1}{2} \epsilon E^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{T}_M = \begin{pmatrix} \mu \cdot H_x^2 - \frac{1}{2} \mu H^2 & \mu \cdot H_x \cdot H_y & \mu \cdot H_x \cdot H_z \\ \mu \cdot H_y \cdot H_x & \mu \cdot H_y^2 - \frac{1}{2} \mu H^2 & \mu \cdot H_y \cdot H_z \\ \mu \cdot H_z \cdot H_x & \mu \cdot H_z \cdot H_y & \mu \cdot H_z^2 - \frac{1}{2} \mu H^2 \end{pmatrix}$$

• ϵ und μ nicht homogen, aber linear

$$\vec{F}_E = \int_A \mathcal{T}_E \cdot d\vec{s} \quad \vec{F}_M = \int_A \mathcal{T}_M \cdot d\vec{s}$$

↑
Matrix Produkt

• A : beliebige Fläche
• $d\vec{s}$: infinitesimales Flächenelement

Coulombintegral E-Statik

Mit dem Coulombintegral kann in homogenen, linearen, isotropen Räumen das durch beliebige Ladungsverteilungen hervorgerufene elektrostatische Feld berechnet werden.

Typen von Ladungen: ρ (Raumladungsdichte), σ (Flächenladungsdichte), λ (Linienladungsdichte), Q_p (Punktladung)

Das durch eine infinitesimale Punktladung dQ hervorgerufene Feld ergibt sich aus:

$$d\vec{E}(\vec{x}) = \frac{dQ}{4\pi\epsilon \|\vec{x} - \vec{p}\|^3} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) \quad \text{mit } \vec{x}: \text{Ort der Feldstärke; } \vec{p}: \text{Ort der Ladung.}$$

Superposition unendlich vieler infinitesimaler Ladungen ergibt das Gesamtfeld:

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho(\vec{p})}{\|\vec{x} - \vec{p}\|^3} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) dV = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_A \frac{\sigma(\vec{p})}{\|\vec{x} - \vec{p}\|^3} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) dA = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_X \frac{\lambda(\vec{p})}{\|\vec{x} - \vec{p}\|^3} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) dX$$

Für das Potential gilt äquivalent:

$$d\mathcal{J}(\vec{x}) = \frac{dQ}{4\pi\epsilon \|\vec{x} - \vec{p}\|} + C \Rightarrow \mathcal{J}(\vec{x}) = \int_V \frac{\rho(\vec{p})}{4\pi\epsilon \|\vec{x} - \vec{p}\|} dV + C$$

Biot-Savart-Gesetz H-Statik / J-Statik

Mit dem Gesetz von Biot-Savart kann in homogenen, linearen, isotropen Räumen das durch beliebige Stromverteilungen hervorgerufene magnetostatische Feld berechnet werden.

Typen von Strömen: \vec{j} (Stromdichte), \vec{J}_F (Flächenstromdichte), \vec{J} (Linienstrom)

Das durch einen infinitesimalen Strom der Länge dL hervorgerufene Feld ergibt sich aus:

$$d\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu \cdot d\vec{J} \cdot d\vec{L}}{4\pi \|\vec{x} - \vec{p}\|^3} \times (\vec{x} - \vec{p}) \quad \text{mit } \vec{x}: \text{Ort der Feldstärke; } \vec{p}: \text{Ort der Stromes.}$$

Superposition unendlich vieler infinitesimaler Ströme ergibt das Gesamtfeld:

$$d\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{p}) \times (\vec{x} - \vec{p})}{\|\vec{x} - \vec{p}\|^3} dV = \frac{\mu}{4\pi} \int_A \frac{\vec{J}_F(\vec{p}) \times (\vec{x} - \vec{p})}{\|\vec{x} - \vec{p}\|^3} dA = \frac{\mu \cdot \vec{J}}{4\pi} \int_X \frac{dX \times (\vec{x} - \vec{p})}{\|\vec{x} - \vec{p}\|^3}$$

Für das Vektorpotential gilt äquivalent:

$$d\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu \cdot d\vec{J} \cdot d\vec{L}}{4\pi \|\vec{x} - \vec{p}\|} \times (\vec{x} - \vec{p}) + \vec{C}(\vec{x}); \text{rot}(\vec{C}(\vec{x})) = \vec{0} \Rightarrow \vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{p}) \times (\vec{x} - \vec{p})}{\|\vec{x} - \vec{p}\|} dV + \vec{C}(\vec{x})$$

Elektrisches, skalares Potential E-Statik

Unter Abwesenheit veränderlicher Magnetfelder ist $\text{rot}(\vec{E}(\vec{x})) = \vec{0}$. \vec{E} lässt sich folglich durch ein skalares Potential $\mathcal{J}(\vec{x})$ darstellen ($\vec{E}(\vec{x}) = -\text{grad}(\mathcal{J}(\vec{x}))$). $[\mathcal{J}] = V = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{sec}^2 \cdot \text{C}}$

Die Differenz zwischen zwei Potentialen heißt Spannung: $U_{1,2} = \mathcal{J}(\vec{x}_2) - \mathcal{J}(\vec{x}_1)$

Aus $\rho = \text{div}(\vec{D}) = \text{div}(\vec{E} \cdot \epsilon) = \text{div}(-\vec{E} \cdot \text{grad}(\mathcal{J}))$ folgt die Potentialgleichung der Elektrostatik.

Für lineare, isotrope, homogene Materialien gilt: $\Delta \mathcal{J}(\vec{x}) = -\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon}$. Dabei handelt es sich um eine Poisson-DGL.

Typische Randbedingungen sind z.B. das Verhalten von \mathcal{J} im Unendlichen, an Grenzflächen oder die Eigenschaft, dass \mathcal{J} endlich ist für endliches \vec{x} .

Magnetisches Vektorpotential

Da $\text{div}(\vec{B}) = 0$ ist, lässt sich $\vec{B}(\vec{x}, t)$ immer eindeutig durch ein Vektorpotential $\vec{A}(\vec{x}, t)$ darstellen ($\vec{B}(\vec{x}, t) = \text{rot}(\vec{A}(\vec{x}, t))$). t ist dabei wie eine Konstante und wird im Folgenden weggelassen.

Aus $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j} = \text{rot}(\vec{H}) = \text{rot}(\frac{1}{\mu} \cdot \vec{B}) = \text{rot}(\frac{1}{\mu} \cdot \text{rot}(\vec{A}))$ folgt der Vektorpotentialansatz.

Für lineare, isotrope, homogene Materialien gilt: $\text{rot}(\text{rot}(\vec{A})) = \text{grad}(\text{div}(\vec{A})) - \Delta \vec{A} = \mu \cdot \vec{j} + \mu \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

Da die Summe von \vec{A} und einem beliebigen, wirbelfreien Feld immer noch ein gültiges Vektorpotential ist, kann \vec{A} so gewählt werden, dass $\text{div}(\vec{A}) = 0$ ist. (Coulomb-Bindung)

$$\text{Nun gilt: } \Delta \vec{A}(\vec{x}) = -\mu \cdot \vec{j}(\vec{x}) - \mu \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Leftrightarrow \begin{aligned} \Delta A_1 &= -\mu \cdot j_1 - \mu \cdot \dot{D}_1 \\ \Delta A_2 &= -\mu \cdot j_2 - \mu \cdot \dot{D}_2 \\ \Delta A_3 &= -\mu \cdot j_3 - \mu \cdot \dot{D}_3 \end{aligned}$$

Die so gewonnenen DGLs sind wieder Poisson-DGLs.

In der Magnetostatik ist $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0$.

H-Statik / J-Statik

Wellengleichungen für Felder

Für die Wellengleichung wird $\vec{J}(\vec{x},t)$ zerlegt in $\kappa \cdot \vec{E}(\vec{x},t) + \vec{J}_e(\vec{x},t)$, wobei J_e eine von E und H unbeeinflusste, durch äußere Kräfte bedingte Größe ist. Umstellen der ersten Maxwellgleichung nach H, einsetzen in die Zweite und ableiten nach t ergibt die

Doppelwirbelgleichung für E:

$$\operatorname{rot}\left(\frac{\operatorname{rot}(\vec{E}(\vec{x},t))}{\mu(\vec{x},t)}\right) = -\epsilon(\vec{x}) \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{x},t)}{\partial t^2} - \kappa(\vec{x}) \cdot \frac{\partial \vec{E}(\vec{x},t)}{\partial t} - \frac{\partial \vec{J}_e(\vec{x},t)}{\partial t}$$
 Gültig für lineare, relaxationsfreie, isotrope Gebiete; ϵ und κ dürfen nicht von der Zeit abhängen.

Durch Umstellen der ersten Maxwellgleichung nach E, einsetzen in die Zweite und anwenden der Rotation erhält man die

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\vec{H}(\vec{x},t))) = -\epsilon(t) \cdot \frac{\partial^2 (\mu(\vec{x},t) \cdot \vec{H}(\vec{x},t))}{\partial t^2} - \kappa(t) \cdot \frac{\partial (\mu(\vec{x},t) \cdot \vec{H}(\vec{x},t))}{\partial t} + \vec{J}_e(\vec{x},t)$$
 Gültig für lineare, relaxationsfreie, isotrope Gebiete; ϵ und κ dürfen hier nicht vom Ort abhängen.

Doppelwirbelgleichung für H:

Unter Annahme weiterer Einschränkungen ergeben sich einfachere Gleichungen für E und H. Typisch sind:

Inhomogene, generalisierte Wellengleichung:

$$\underbrace{\Delta \vec{E}(\vec{x},t)}_{\text{Schwingungsterm}} - \underbrace{\mu \cdot \epsilon \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{x},t)}{\partial t^2}}_{\text{Dämpfungsterm}} - \underbrace{\mu \cdot \kappa \cdot \frac{\partial \vec{E}(\vec{x},t)}{\partial t}}_{\text{Anregungsterm}} = \underbrace{\mu \cdot \frac{\partial \vec{J}_e(\vec{x},t)}{\partial t}}_{\text{Anregungsterm}} + \frac{\operatorname{grad}(\rho(\vec{x},t))}{\epsilon}$$
$$\Delta \vec{H}(\vec{x},t) - \mu \cdot \epsilon \cdot \frac{\partial^2 \vec{H}(\vec{x},t)}{\partial t^2} - \mu \cdot \kappa \cdot \frac{\partial \vec{H}(\vec{x},t)}{\partial t} = -\operatorname{rot}(\vec{J}_e(\vec{x},t))$$

Inhomogene, harmonische, generalisierte Wellengleichung:

$$\Delta \vec{E}(\vec{x}) + \omega^2 \cdot \mu \cdot \epsilon \cdot \vec{E}(\vec{x}) = i\omega \cdot \mu \cdot \vec{J}_e(\vec{x}) + \frac{\operatorname{grad}(\rho(\vec{x}))}{\epsilon} \quad \text{mit} \quad \epsilon = \epsilon - \frac{i\kappa}{\omega} \quad \frac{\partial}{\partial t} = i\omega \quad \vec{E}(\vec{x},t) = \operatorname{Re}(\vec{E}(\vec{x}) \cdot e^{i\omega t})$$

γ^2 : Ausbreitungskonstante

$$\Delta \vec{H}(\vec{x}) + \omega^2 \cdot \mu \cdot \epsilon \cdot \vec{H}(\vec{x}) = -\operatorname{rot}(\vec{J}_e(\vec{x}))$$
$$\gamma = \omega \cdot \sqrt{\frac{\mu \epsilon}{2} \cdot \left(\sqrt{\frac{\kappa}{\omega \epsilon} + 1} - 1 + i \right)} \cdot \sqrt{\frac{\mu \epsilon}{2} \cdot \left(\sqrt{\frac{\kappa}{\omega \epsilon} + 1} + 1 + i \right)} = i k$$

$\operatorname{Re}(\gamma) = \alpha$: Dämpfungskonstante
 $\operatorname{Im}(\gamma) = \beta$: Phasenkonstante

Homogene, harmonische, generalisierte Wellengleichung:

$$\Delta \vec{E}(\vec{x}) + \omega^2 \cdot \mu \cdot \epsilon \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \vec{0} \quad \Delta \vec{H}(\vec{x}) + \omega^2 \cdot \mu \cdot \epsilon \cdot \vec{H}(\vec{x}) = \vec{0} \quad \text{Typ: Helmholtz-DGL}$$

Homogene, harmonische Wellengleichung:

$$\Delta \vec{E}(\vec{x}) + \omega^2 \cdot \mu \cdot \epsilon \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \vec{0} \quad \Delta \vec{H}(\vec{x}) + \omega^2 \cdot \mu \cdot \epsilon \cdot \vec{H}(\vec{x}) = \vec{0} \quad \text{Typ: Helmholtz-DGL}$$

Homogene Wellengleichung: mit dem d'Alembert-Operator

$$\Delta \vec{E}(\vec{x},t) - \mu \cdot \epsilon \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{x},t)}{\partial t^2} = \square \vec{E}(\vec{x},t) = \vec{0} \quad \square \vec{H}(\vec{x},t) = \vec{0} \quad \square = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

Typ: d'Alembert-DGL

Daraus folgt direkt die Maxwell-Relation:

$$v = c = \frac{1}{\sqrt{\mu \cdot \epsilon}} = \left[\frac{m}{s} \right] \quad c_0^2 = \frac{1}{\mu_0 \cdot \epsilon_0} \quad c = \frac{c_0}{\eta} \quad \text{mit Brechungsindex} \quad \eta = \sqrt{\mu_r \cdot \epsilon_r}$$

Inhomogene Wellengleichung:

$$\square \vec{E}(\vec{x},t) = \mu \cdot \frac{\partial \vec{J}_e(\vec{x},t)}{\partial t} + \frac{\operatorname{grad}(\rho(\vec{x},t))}{\epsilon} \quad \square \vec{H}(\vec{x},t) = -\operatorname{rot}(\vec{J}_e(\vec{x},t))$$

$\mu, \epsilon, \kappa = \text{const.}$

monofrequent

anregungsfrei

dämpfungsfrei

*Oft wird dieser Operator auch mit umgekehrten Vorzeichen geschrieben.

Wellengleichungen für Vektorpotentiale

Aus der vierten Maxwellgleichung folgt, dass B immer eindeutig durch ein Vektorpotential A beschrieben werden kann (Zu Klären: Kann B eine Potentialströmung sein?), sodass $\vec{B}(\vec{x},t) = \text{rot}(\vec{A}(\vec{x},t))$ Anmerkung: Durch bilden der Rotation geht die Informationsmenge von genau einer Feldkomponente verloren. Das folgt aus $\text{div}(\text{rot}(\vec{A}(\vec{x},t))) = 0$. Dies muss bei der Bildung einer inversen Rotation beachtet werden: Ist A ein Vektorpotential von B, so ist auch $\vec{A}'(\vec{x},t) = \vec{A}(\vec{x},t) + \text{grad}(\Phi(\vec{x},t))$ ein gültiges Vektorpotential von B.

Dadurch schreibt sich die erste Maxwellgleichung als $\vec{E}(\vec{x},t) = -\frac{\partial \vec{A}(\vec{x},t)}{\partial t} - \text{grad}(\Phi(\vec{x},t))$.

Mit $\vec{H}(\vec{x},t) = \frac{1}{\mu(\vec{x},t)} \text{rot}(\vec{A}(\vec{x},t))$ lässt sich die zweite Maxwellgleichung schreiben als:

Doppelwirbelgleichung für Potentiale:

$$\text{rot}\left(\frac{\text{rot}(\vec{A}(\vec{x},t))}{\mu(\vec{x},t)}\right) = -\frac{\partial \varepsilon(\vec{x},t) \cdot \left(\frac{\partial \vec{A}(\vec{x},t)}{\partial t} + \text{grad}(\Phi(\vec{x},t))\right)}{\partial t} - \kappa(\vec{x},t) \cdot \left(\frac{\partial \vec{A}(\vec{x},t)}{\partial t} + \text{grad}(\Phi(\vec{x},t))\right) + \vec{J}_e(\vec{x},t)$$

Sie ist gültig in allen isotropen Gebieten, erfasst jedoch nicht den statischen Fall.

Für $\mu, \varepsilon, \kappa := \text{const.}$ folgt die

Feldgleichung für Potentiale:

$$\begin{aligned} \text{div}(\vec{A}(\vec{x},t)) &= -\mu \varepsilon \cdot \frac{\partial \Phi(\vec{x},t)}{\partial t} - \mu \kappa \cdot \Phi(\vec{x},t) \\ \Delta \vec{A}(\vec{x},t) - \mu \varepsilon \cdot \frac{\partial \vec{A}(\vec{x},t)}{\partial t} - \mu \kappa \cdot \frac{\partial \vec{A}(\vec{x},t)}{\partial t} &= \text{grad}\left(\text{div}(\vec{A}(\vec{x},t)) + \mu \varepsilon \cdot \frac{\partial \Phi(\vec{x},t)}{\partial t} + \mu \kappa \cdot \Phi(\vec{x},t)\right) - \mu \cdot \vec{J}_e(\vec{x},t) \end{aligned}$$

Wie oben erwähnt, ist A unterbestimmt und kann so gewählt werden, dass z.B. $\text{div}(\vec{A})$ einen bestimmten Wert annimmt. Üblich ist:

- Coulombeichung: $\text{div}(\vec{A}(\vec{x},t)) = 0$
 - Lorenzeichung: $\text{div}(\vec{A}(\vec{x},t)) = -\frac{1}{c_0^2} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial t}$
- Tatsächlich ist im dynamischen Fall der Quellenanteil des elektrischen Feldes eindeutig über die Kontinuitätsgleichung bestimmt.

Wenn keine Raumladungen vorhanden sind, kann auch E eindeutig durch ein Vektorpotential beschrieben werden, sodass $\vec{E}(\vec{x},t) = \text{rot}(\vec{A}_{el}(\vec{x},t))$ Durch Umstellen der ersten - und zweiten Maxwellgleichung nach H erhält man:

$$\vec{H}(\vec{x},t) = -\frac{1}{\mu} \cdot \int \text{rot}(\text{rot}(\vec{A}_{el})) dt \quad \vec{H}(\vec{x},t) + \text{grad}(\Phi_H(\vec{x},t)) = \varepsilon \cdot \frac{\partial \vec{A}_{el}(\vec{x},t)}{\partial t} + \kappa \cdot \vec{A}_{el}(\vec{x},t) + \text{rot}^{-1}(\vec{J}_e(\vec{x},t))$$

Einsetzen der ersten Gleichung in die Zweite, multiplizieren mit μ und Ableiten nach t liefert:

$$\underbrace{\Delta \vec{A}_{el}(\vec{x},t) - \text{grad}(\text{div}(\vec{A}_{el}(\vec{x},t))) + \mu \frac{\partial \text{grad}(\Phi_H(\vec{x},t))}{\partial t}}_{= 0 \text{ (durch Lorenzeichung)}} = \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{A}_{el}(\vec{x},t)}{\partial t^2} + \mu \kappa \frac{\partial \vec{A}_{el}(\vec{x},t)}{\partial t} + \underbrace{\mu \frac{\partial \text{rot}^{-1}(\vec{J}_e(\vec{x},t))}{\partial t}}_{\text{hier kann Coulombeichung verwendet werden}}$$

So folgen die

inhomogenen, vektoriellen Wellengleichungen:

$$\Delta \vec{A}(\vec{x},t) - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{A}(\vec{x},t)}{\partial t^2} - \mu \kappa \frac{\partial \vec{A}(\vec{x},t)}{\partial t} = -\mu \cdot \vec{J}_e(\vec{x},t) \quad \Delta \vec{A}_{el}(\vec{x},t) - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{A}_{el}(\vec{x},t)}{\partial t^2} - \mu \kappa \frac{\partial \vec{A}_{el}(\vec{x},t)}{\partial t} = \mu \frac{\partial \text{rot}^{-1}(\vec{J}_e(\vec{x},t))}{\partial t}$$

In solchen linearen Gebieten können E und H durch Fourier- bzw. Laplacetransformation immer in monofrequente Anteile zerlegt werden, und es kann für die Wellengleichung komplex gerechnet werden:

$$\Delta \vec{A}(\vec{x}) + k^2 \cdot \vec{A}(\vec{x},t) = -\vec{J}_e(\vec{x}) \quad \Delta \vec{A}_{el}(\vec{x}) + k^2 \cdot \vec{A}_{el}(\vec{x},t) = i \omega \mu \cdot \text{rot}^{-1}(\vec{J}_e(\vec{x})) \quad \text{Für } J_e = 0 \text{ ist dies vom Typ Helmholtz-DGL.}$$

Feldgleichungen in Tensoren

Um die Potentialgleichungen in Tensoren zu überführen, werden zunächst die Ortskoordinaten und die Zeit durch die Komponenten des

4-er-Vektors ersetzt. So folgt: $\frac{\partial}{\partial t}=j\,c_0\cdot\frac{\partial}{\partial \theta^4}$ und die Lorenzgleichung stellt sich dar als $\operatorname{div}\vec{A}=\frac{-j}{c_0}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial \theta^4}$.

Anstelle von \vec{A} und Φ tritt der 4-er-Vektor Ω : $\Omega^1=A^1\quad \Omega^2=A^2\quad \Omega^3=A^3\quad \Omega^4=\frac{j}{c_0}\cdot\Phi \rightarrow \operatorname{div}(\vec{\Omega})=0$

Anstelle von J tritt Γ : $\Gamma^1=J^1\quad \Gamma^2=J^2\quad \Gamma^3=J^3\quad \Gamma^4=j\,c_0\cdot\rho \rightarrow \operatorname{div}(\vec{\Gamma})=0$

$$f^{ik}=\frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\partial \Omega^i}{\partial x_k}-\frac{\partial \Omega^k}{\partial x_i}\right)=\begin{pmatrix} 0 & -H_z & H_y & j\,c_0\cdot D_x \\ H_z & 0 & -H_x & j\,c_0\cdot D_y \\ -H_y & H_x & 0 & j\,c_0\cdot D_z \\ -j\,c_0\cdot D_x & -j\,c_0\cdot D_y & -j\,c_0\cdot D_z & 0 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{div}(f)=\vec{\Gamma}$

ersetzt $\operatorname{div}(D)=\rho$

$\operatorname{rot}(H)=\partial D/\partial t+J$

$$F^{*ik}=\frac{1}{2}\cdot e^{iklm}\cdot F_{lm}=\begin{pmatrix} 0 & j\,E_z & -j\,E_y & -c_0\cdot B_x \\ -j\,E_z & 0 & j\,E_x & -c_0\cdot B_y \\ j\,E_y & -j\,E_x & 0 & -c_0\cdot B_z \\ c_0\cdot B_x & c_0\cdot B_y & c_0\cdot B_z & 0 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{div}(F^*)=\vec{0}$

ersetzt $\operatorname{div}(B)=0$

$\operatorname{rot}(E)=-\partial B/\partial t$

$$F^{ik}=\begin{cases} \mu_r\cdot Z_0\cdot f^{ik} & \text{für } i\neq 4 \wedge k\neq 4 \\ \frac{1}{\varepsilon_r}\cdot Z_0\cdot f^{ik} & \text{für } i=4 \vee k=4 \end{cases}$$

Differentialgleichungen

Poisson-DGL

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$; $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$; $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (bekannt); $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Nun ist die Poisson-DGL eine elliptische Differentialgleichung der Form $-\Delta \Phi(\vec{x}) = f(\vec{x})$. Zur Lösung muss außerdem ein Randwertproblem bekannt sein. Man unterscheidet zwischen:

Dirichlet-Randwertproblem	$\Phi(\partial \Omega) = \Phi_0(\partial \Omega)$	Φ ist auf dem Rand gegeben.
Dirichlet-Randwertproblem mit schwebendem Potential	$\Phi(\partial \Omega) = const$ $\int_{\Omega} f(\partial \Omega) d\Omega = \frac{Q}{\epsilon}$	Φ ist auf dem Rand konstant und das (Volumen)integral von f über Ω ist bekannt (Dies entspricht der Gesamtladung im Falle eines elektrostatischen Potentials).
Neumann-Randwertproblem	$\frac{\partial \Phi(\partial \Omega)}{\partial \vec{n}_0(\partial \Omega)} = \Phi'_0(\partial \Omega)$	Die Normalenableitung von Φ ist auf dem Rand gegeben. (n_0 : Normalenfeld von Ω)
Robin-Randwertproblem	$A \cdot \Phi(\partial \Omega) + B \cdot \frac{\partial \Phi(\partial \Omega)}{\partial \vec{n}_0(\partial \Omega)} = \Psi(\partial \Omega)$	Eine Linearkombination von Φ und dessen Normalenableitung ist auf dem Rand gegeben.

Im Falle eines Dirichlet-Randwertproblems mit $\Omega = \mathbb{R}^n$ und $\lim_{\|\vec{x}\| \rightarrow \infty} \Phi(\vec{x}) = 0$ spricht man von der **Freiraumlösung**.

In diesem Fall erhält man eine Fundamentallösung, indem man die Fundamentallösung Φ_f der Laplace-DGL im Freiraum mit f faltet:

$$\Phi(\vec{x}) = f(\vec{x}) * \Phi_f(\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{q}) \cdot \Phi_f(\vec{x} - \vec{q}) d\vec{q}$$
 Im Falle eines elektrischen Potentials ist dies das **Coulomb-Integral**.

Um die Laplace-DGL auf anderen Gebieten, als dem Freiraum zu lösen, kann die **Greensche Funktion** benutzt werden. Diese setzt sich zusammen aus $G(\vec{x}, \vec{q}) = \Phi_f(\vec{x} - \vec{q}) + h(\vec{x}, \vec{q})$ wobei Φ_f die Fundamentallösung und h eine Hilfsfunktion ist, welche die Bedingung:

$$\Delta_q h(\vec{x}, \vec{q}) = \frac{\partial^2 h(\vec{x}, \vec{q})}{\partial q_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 h(\vec{x}, \vec{q})}{\partial q_n^2} = 0$$
 erfüllen muss. Aus der Singularität von Φ_f im Ursprung folgt $\Delta_q G(\vec{x}, \vec{q}) = -\delta(\vec{x} - \vec{q})$. Je nach Randwertproblem muss außerdem gelten:

Dirichlet-RWP	$h(\vec{x}, \vec{q} \in \partial \Omega) = -\Phi_f(\vec{q} \in \partial \Omega)$	$G(\vec{x}, \vec{q} \in \partial \Omega) = 0$
Neumann-RWP		$\langle \vec{n}, grad_q(G(\vec{x}, \vec{q} \in \partial \Omega)) \rangle = c$

Nun werden das gesuchte Φ , sowie G in die zweite, greensche Integralformel eingesetzt:

$$\int_{\Omega} (\Phi(\vec{q}) \cdot \Delta_q G(\vec{x}, \vec{q}) - \Delta \Phi(\vec{q}) \cdot G(\vec{x}, \vec{q})) d\Omega = \oint_{\partial \Omega} \left(\Phi(\vec{q}) \cdot \frac{\partial_q G(\vec{x}, \vec{q})}{\partial \vec{n}} - G(\vec{x}, \vec{q}) \cdot \frac{\partial \Phi(\vec{q})}{\partial \vec{n}} \right) d(\partial \Omega)$$
$$- \int_{\Omega} \Phi(\vec{q}) \cdot \Delta_q G(\vec{x}, \vec{q}) d\Omega = \int_{\Omega} (-\Delta \Phi(\vec{q}) \cdot G(\vec{x}, \vec{q})) d\Omega + \oint_{\partial \Omega} \left(G(\vec{x}, \vec{q}) \cdot \frac{\partial \Phi(\vec{q})}{\partial \vec{n}} - \Phi(\vec{q}) \cdot \frac{\partial_q G(\vec{x}, \vec{q})}{\partial \vec{n}} \right) d(\partial \Omega)$$

Ausblend-eigenschaft

$$\Phi(\vec{x}) = \begin{cases} \int_{\Omega} (-f(\vec{q}) \cdot G(\vec{x}, \vec{q})) d\Omega - \oint_{\partial \Omega} \Phi(\vec{q}) \cdot \frac{\partial_q G(\vec{x}, \vec{q})}{\partial \vec{n}} d(\partial \Omega) & \text{für Dirichlet-RWP} \\ \int_{\Omega} (-f(\vec{q}) \cdot G(\vec{x}, \vec{q})) d\Omega + \oint_{\partial \Omega} G(\vec{x}, \vec{q}) \cdot \frac{\partial \Phi(\vec{q})}{\partial \vec{n}} d(\partial \Omega) - \underbrace{\int_{\partial \Omega} \Phi(\vec{q}) \cdot c d(\partial \Omega)}_{= const.} & \text{für Neumann-RWP} \end{cases}$$

Es wird immer nach q abgeleitet und integriert.

Im Falle eines elektrischen Potentials heißen diese Gleichungen auch **verallgemeinertes Coulombintegral**.

Die Schwierigkeiten bei diesem Verfahren bestehen darin, dass die Integrale oft nicht oder nur schwer lösbar sind und darin, eine Greensche Funktion zu finden. Nicht für alle Anordnungen existiert eine solche Funktion.

Daher ist es meist einfacher, Φ zu zerlegen in eine **homogene** und eine **partikuläre Lösung**: $\Phi(\vec{x}) = \Phi_h(\vec{x}) + \Phi_p(\vec{x})$

Nun soll Φ_p die Poisson-DGL nur im Freiraum lösen (Coulomb-Integral) und Φ_h soll nur die Laplace-DGL lösen, mit angepassten Randbedingungen $\Phi_h(\partial \Omega) = \Phi_0(\partial \Omega) - \Phi_p(\partial \Omega)$

Helmholtz-DGL

Sei $\Omega \in \mathbb{R}^n$, $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Die Helmholtz-Differentialgleichung ist eine elliptische Differentialgleichung der Form $\Delta \Phi(\vec{x}) + k^2 \cdot \Phi(\vec{x}) = 0$

Im \mathbb{R}^3 ist die Helmholtz-DGL in 11 Koordinatensystemen gemäß dem **Separationsansatz von Bernoulli** separierbar. Dabei ergeben sich für die einzelnen K_i unterschiedliche Differentialgleichungen. Um diese direkt hinschreiben zu können, gibt es den **Stäckel-Formalismus**. Dabei erhält jedes Koordinatensystem eine Matrix, die **Stäckelmatrix**. Es kann dabei mehrere gültige Stäckelmatrizen zu einem System geben.

Eine Stäckelmatrix ist wie folgt aufgebaut:

$$S = \begin{pmatrix} s_{11}(x_1) & s_{12}(x_1) & s_{13}(x_1) \\ s_{21}(x_2) & s_{22}(x_2) & s_{23}(x_2) \\ s_{31}(x_3) & s_{32}(x_3) & s_{33}(x_3) \end{pmatrix}$$

Außerdem werden Unterdeterminanten benötigt:
 $\widetilde{s}_{i,j} = (-1)^{i+j} \cdot \det(S_{i,j})$

Dabei ist S_{ij} ein Minor von S, bei dem die i-te Zeile und die j-te Spalte fehlen.

Für die Metrikkoeffizienten gilt:

$$h_i = \sqrt{\frac{\det(S)}{\widetilde{s}_{i,i}}}$$

Nun werden drei Hilfsfunktionen gebildet aus: $g_1(x_i) \cdot g_2(x_2) \cdot g_3(x_3) = \frac{h_1 \cdot h_2 \cdot h_3}{\det(S)}$ Die drei separierten, gewöhnlichen Differentialgleichungen lassen sich dann schreiben als:

$$\frac{1}{g_i(x_i)} \cdot \frac{d}{dx_i} \left(g_i(x_i) \cdot \frac{d\varphi_i(x_i)}{dx_i} \right) + \left(\sum_{j=1}^3 s_{ij}(x_i) \cdot \alpha_j \right) \cdot \varphi_i(x_i) = 0$$

wobei $\alpha_1 = k$ und α_2, α_3 beliebig gewählt werden.

Laplace-DGL

Die Laplace-DGL ist je nach Situation ein Spezialfall der Poisson-, Helmholtz-, oder d'Alembert-DGL: $\Delta \Phi(\vec{x}) = 0$ Auch hier muss für die Lösung ein Randwertproblem gegeben sein. Funktionen Φ , die die Laplace-DGL erfüllen, heißen **harmonische Funktionen**.

Die **Freiraumlösung/Fundamentallösung** für $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus 0$ lautet:

Dabei ist ω_n die Oberfläche der n-dimensionalen Einheitssphäre: $\omega_n = \frac{2 \cdot \pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$

$$\Phi_f(\vec{x}) = \begin{cases} -\frac{\ln(\|\vec{x}\|)}{2\pi} & \text{für } n=2 \\ \frac{1}{(n-2) \cdot \omega_n \cdot \|\vec{x}\|^{n-2}} & \text{für } n>2 \end{cases} = \frac{1}{4\pi \cdot \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \text{ für } n=3$$

Anmerkung: Die Freiraumlösung Φ_f besitzt eine Singularität im Ursprung. Falls dieser $\in \Omega$ ist, entsteht dort ein Dirac-Impuls. Genau, wie bei der Poisson-DGL kann auch hier die **Greensche Funktion** benutzt werden, um Lösungen für andere Gebiete, als den Freiraum zu finden.

Insbesondere, wenn ein orthogonales Koordinatensystem existiert, in dem die Laplace-DGL separierbar ist und dessen Koordinateneinheitsflächen auf $\partial\Omega$ fallen, lässt sich die Laplace-DGL leicht mit dem **Separationsansatz von Bernoulli** lösen:

Hierfür wird $\Phi(\vec{x}) = \varphi_1(x_1) \cdot \dots \cdot \varphi_n(x_n)$ gesetzt. Die Laplace-DGL schreibt sich dann in kartesischen Koordinaten:

$$\varphi_2 \cdot \dots \cdot \varphi_n \cdot \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_1^2} + \dots + \varphi_1 \cdot \dots \cdot \varphi_{n-1} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x_n^2} = 0$$

teilen durch Φ :

$$\underbrace{\frac{1}{\varphi_1(x_1)} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_1(x_1)}{\partial x_1^2}}_{K_1} + \dots + \underbrace{\frac{1}{\varphi_n(x_n)} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_n(x_n)}{\partial x_n^2}}_{K_n} = 0$$

Die einzelnen Summanden der Formel können nur konstant sein, damit die Gleichung überall erfüllt werden kann. Für jeden Summanden ergibt sich dann eine gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung. Außerdem gilt die Separationsbedingung $K_1 + \dots + K_n = 0$ Damit diese erfüllt werden kann, müssen einige K Null oder negativ sein. Dabei werden folgende Fälle unterschieden:

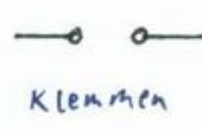
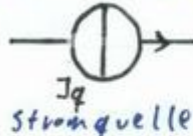
$$K_i = \begin{cases} k_i^2 & \Rightarrow \varphi_i = \left(A_i \cdot \cosh(k_i x_i) + B_i \cdot \sinh(k_i x_i) \right) \\ 0 & \Rightarrow \varphi_i = \left(A_i + B_i \cdot x_i \right) \\ -k_i^2 & \Rightarrow \varphi_i = \left(A_i \cdot \cos(k_i x_i) + B_i \cdot \sin(k_i x_i) \right) \end{cases}$$

Genau, wie die Helmholtz-DGL ist die Laplace-DGL als ein Spezialfall davon mit $K = k^2 = 0$ und reellen Funktionen und Konstanten im \mathbb{R}^3 in 11 Koordinatensystemen separierbar und es kann der von der Helmholtz-GDI bekannte **Stäckelformalismus** verwendet werden.

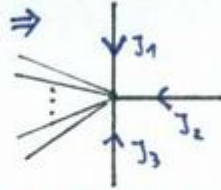
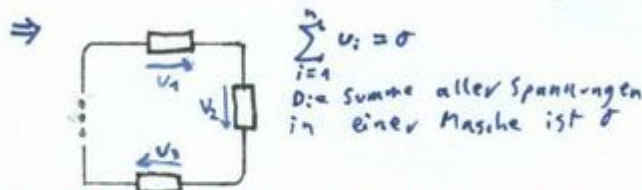
Lineare Netzwerke

Ein lineares Netzwerk ist eine Schaltung aus linearen, diskreten Bauelementen. Dabei muss ein Feld/ eine Größe außerhalb der Bauelemente ein Potential besitzen (Im Folgenden ist dies die Spannung). Für die andere Größe muss die Divergenz 0 sein (Im Folgenden Strom).

Symbole:

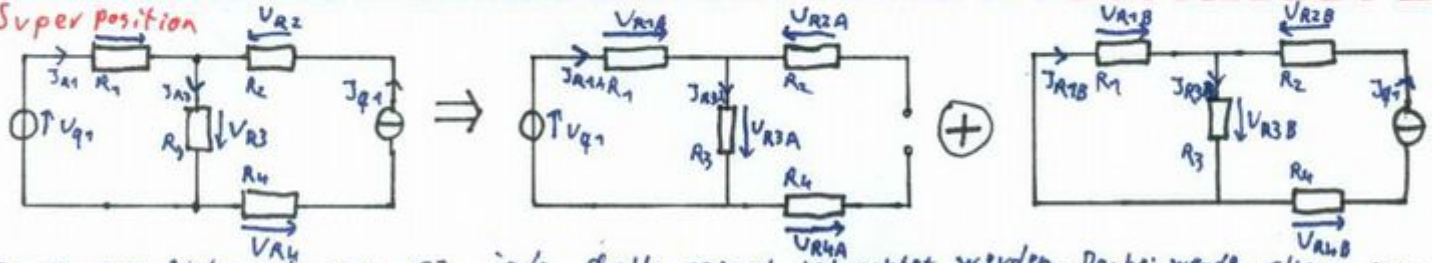


Im Fall der komplexen Wechselstromrechnung können alle Größen komplex sein!



$\sum_{i=1}^n J_i = 0$
Die Summe aller zufließenden / abfließenden Ströme in einem Knoten ist 0. Ein Knoten kann auch eine ganze Teilnetzung sein.

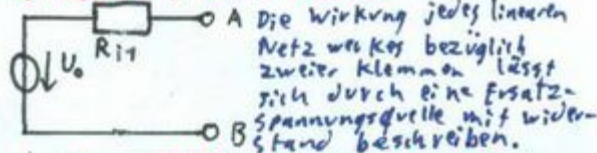
Superposition



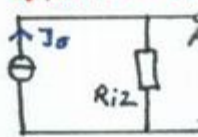
Ein lineares Netzwerk kann für jede Quelle separat betrachtet werden. Dabei werden alle anderen Spannungsquellen kurzgeschlossen und alle anderen Stromquellen aufgetrennt. Die so berechneten Spannungen und Ströme werden danach addiert: $J_{RX} = J_{RXA} + J_{RXB}$ $V_{RX} = V_{RXA} + V_{RXB}$

Ersatzschaltbilder

↳ Thevenin-Helmholtz-Theorem:

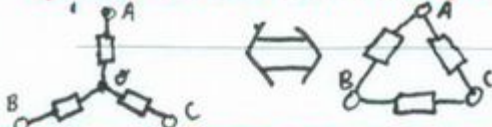


↳ Norton-Meyer-Theorem:



- $R_{i1} = R_{i2} = R_i$
- $U_0 = J_0 \cdot R_i$

↳ Stern-Dreieck-Transformation:

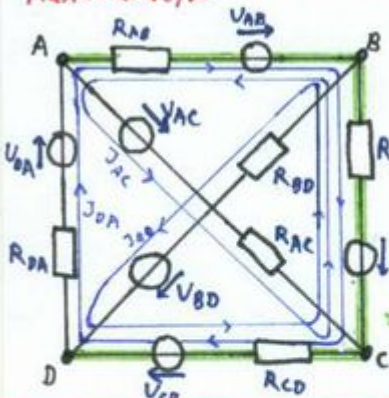


$$R_{A0} = \frac{R_{AC} \cdot R_{AB}}{R_{AC} + R_{AB} + R_{BC}}$$

$$R_{AC} = \frac{R_{A0} + R_{B0} + R_{B0} \cdot R_{C0} + R_{C0} \cdot R_{A0}}{R_{B0}}$$

Auch Stern-Polygon-Transformationen sind möglich. Im Polygon muss jeder Widerstand mit jedem anderen verbunden sein.

Maschenanalyse

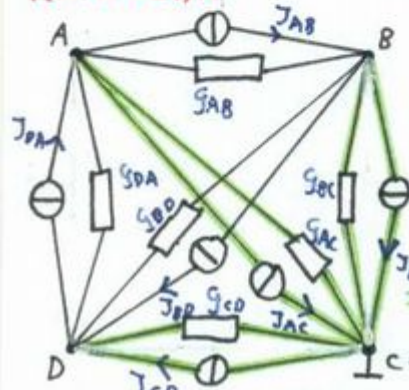


	J_{AC}	J_{BD}	J_{DA}
J_{AC}	$R_{AC} + R_{BC} + R_{AB}$	R_{BC}	$-R_{BC} - R_{AB}$
J_{BD}	R_{BC}	$R_{BD} + R_{CD} + R_{BC}$	$-R_{CD} - R_{BC}$
J_{DA}	$-R_{BC} - R_{AB}$	$-R_{CD} - R_{BC}$	$R_{DA} + R_{AB} + R_{BC} + R_{CD}$

Spannungsquellen wurden auf die äußere Seite gebracht.

Vorzeichen: Wenn Ströme in einem Widerstand in die gleiche Richtung fließen +, sonst -
Vollständiger Baum: Verbindet alle Knoten. Für alle übrigen Zweige (Zerren) wird je ein Strom eingezeichnet, der über die Seite und dann ausschließlich über den Baum im Kreis läuft. Jeder Strom durchläuft so eine Masche, in der $\sum V = 0$ ist.

Knotenanalyse



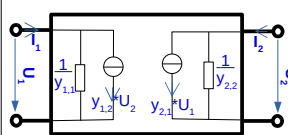
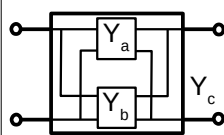
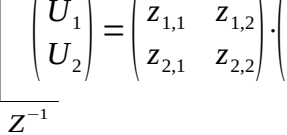
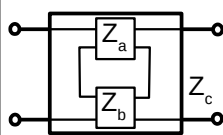
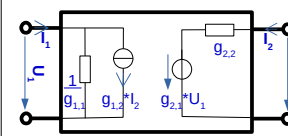

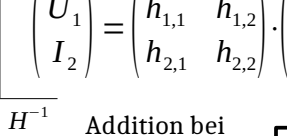
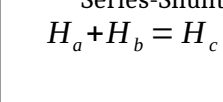
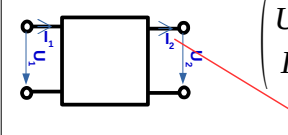
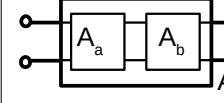
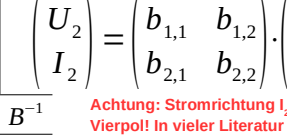
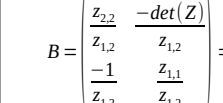
	J_A	J_B	J_D
A	$g_{AC} + g_{AB} + g_{DA}$	$-g_{AB}$	$-g_{DA}$
B	$-g_{AB}$	$g_{BC} + g_{AB} + g_{BD}$	$-g_{BD}$
D	$-g_{DA}$	$-g_{BD}$	$g_{CD} + g_{BD} + g_{DA}$

Zufließende Ströme +, abfließende -

$$\begin{aligned} & -J_{AB} - J_{AC} + J_{DA} \\ & +J_{AB} - J_{BC} - J_{BD} \\ & +J_{BD} + J_{CD} - J_{DA} \end{aligned}$$

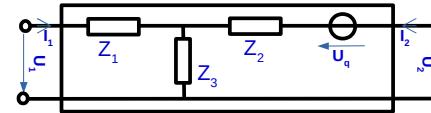
Vorzeichen: Auf Hauptdiagonale +, sonst -. Vorzeichen können global vertauscht werden (Alles $\cdot (-1)$).
Vollständiger Baum: Verbindet einen Bezugs-Knoten direkt mit allen anderen. Für nicht-existierende Verbindungen können fiktive Leitwerte $g=0$ eingefügt werden. $J_C = 0$.

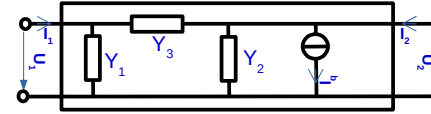
Vierpolmatrizen

<div>Y-/Admittanzparameter $\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{1,1} & y_{1,2} \\ y_{2,1} & y_{2,2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$ Addition bei Shunt-Shunt $Y_a + Y_b = Y_c$ $Y = \begin{pmatrix} \det(G) & g_{12} \\ g_{2,2} & g_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a_{2,2}}{a_{1,2}} & -\det(A) \\ -\frac{g_{2,1}}{g_{2,2}} & \frac{1}{g_{2,2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a_{2,2}}{a_{1,2}} & -\det(A) \\ -\frac{1}{a_{1,2}} & \frac{a_{1,1}}{a_{1,2}} \end{pmatrix}$</div>	<div>Z-/Impedanzparameter $\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{1,1} & z_{1,2} \\ z_{2,1} & z_{2,2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$ Addition bei Series-Series $Z_a + Z_b = Z_c$ $Z = \begin{pmatrix} \det(H) & h_{1,2} \\ h_{2,2} & h_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-b_{2,2}}{b_{2,1}} & \frac{-1}{b_{2,1}} \\ -\frac{h_{2,1}}{h_{2,2}} & \frac{1}{h_{2,2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-\det(B)}{b_{2,1}} & \frac{-b_{1,1}}{b_{2,1}} \\ \frac{-h_{2,1}}{h_{2,2}} & \frac{1}{h_{2,2}} \end{pmatrix}$</div>
<div>G-/Inverse Hybridparameter $\begin{pmatrix} I_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{1,1} & g_{1,2} \\ g_{2,1} & g_{2,2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$ Addition bei Shunt-Series $G_a + G_b = G_c$</div>	<div>H-/Hybridparameter $\begin{pmatrix} U_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} \\ h_{2,1} & h_{2,2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$ Addition bei Series-Shunt $H_a + H_b = H_c$ $G = H^{-1}$</div>
<div>A-/Kettenparameter $\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix}$ Multiplikation bei Verkettung $A_a \cdot A_b = A_c$ $A = \begin{pmatrix} \frac{-y_{2,2}}{y_{2,1}} & \frac{-1}{y_{2,1}} \\ -\det(Y) & -\frac{y_{1,1}}{y_{2,1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{g_{2,1}} & \frac{g_{2,2}}{g_{2,1}} \\ \frac{g_{1,1}}{g_{2,1}} & \det(G) \end{pmatrix}$</div>	<div>B-/Inverse Kettenparameter $\begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix}$ Multiplikation bei Verkettung $B_b \cdot B_a = B_c$ $B = \begin{pmatrix} \frac{z_{2,2}}{z_{1,2}} & \frac{-\det(Z)}{z_{1,2}} \\ \frac{-1}{z_{1,2}} & \frac{z_{1,1}}{z_{1,2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{h_{1,2}} & \frac{-h_{1,1}}{h_{1,2}} \\ \frac{-h_{2,2}}{h_{1,2}} & \frac{\det(H)}{h_{1,2}} \end{pmatrix}$ $A = B^{-1}$</div>

Ein Zweitor/Vierpol heißt **reziprok**, wenn die Ausgangsspannung U_a , die ein Eingangsstrom I_e hervorruft, gleich bleibt, wenn man das Zweitor herum dreht. Daraus folgt: $z_{1,2} = z_{2,1}$ $y_{1,2} = y_{2,1}$ $h_{1,2} = -h_{2,1}$ $p_{1,2} = -p_{2,1}$ $\det(A) = 1$ $\det(B) = 1$ Ein Zweitor, das nur aus passiven Bauteilen besteht ist immer reziprok.

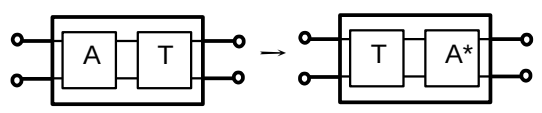
Ein Zweitor/Vierpol heißt **passiv**, wenn keine (wirk)Leistung abgegeben wird. Dies schließt insbesondere Verstärker aus, die durch zusätzliche Stromversorgung Leistung einspeisen.

**T-Ersatzschaltbild**
Jedes lineare Zweitor lässt sich durch ein T-Ersatzschaltbild darstellen mit
 $Z_1 = z_{1,1} - z_{1,2}$ $Z_2 = z_{2,2} - z_{1,2}$ $Z_3 = z_{1,2}$ $U_q = (z_{2,1} - z_{1,2}) \cdot I_1$

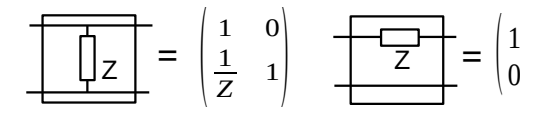
**Π-Ersatzschaltbild**
Jedes lineare Zweitor lässt sich durch ein Π-Ersatzschaltbild darstellen mit
 $Y_1 = y_{1,1} + y_{1,2}$ $Y_2 = y_{2,2} + y_{1,2}$ $Y_3 = -y_{1,2}$ $I_q = (y_{2,1} - y_{1,2}) \cdot U_1$

Projektion von Bauteilen durch ein Zweitor:

Die Kettenparameter-Darstellung kann auch benutzt werden, um ein solches Zweitor mit einem anderen Zweitor zu vertauschen.



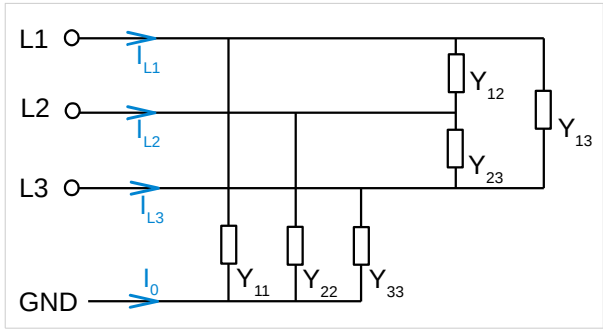
Die Zweitore A und T seien als Kettenparameter gegeben; T sei außerdem invertierbar. Aus der Forderung, dass das Netzwerk an den äußeren Klemmen das gleiche Verhalten behält, lässt sich ableiten, dass $A^* = T^{-1} \cdot A \cdot T$



Im Falle transformatorischer oder gyratorischer Kopplung lassen sich einzelne Impedanzen auf beiden Seiten von T als eines der nebenstehenden Zweitore darstellen. Einzelne Spannungs- oder Stromquellen können nach dem Prinzip der homogenen Koordinaten mit Hilfe von 3x3-Matrizen und um 1 erweiterte Vektoren ebenfalls projiziert werden.

Drehstrom

Ein lineares Drehstromsystem lässt sich bezüglich der drei Anschlussklemmen als folgendes Ersatzschaltbild darstellen:



Somit lässt sich folgende Admittanzmatrix aufstellen:

$$\begin{pmatrix} I_{L1} \\ I_{L2} \\ I_{L3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11}+Y_{12}+Y_{13} & -Y_{12} & -Y_{13} \\ -Y_{12} & Y_{22}+Y_{12}+Y_{23} & -Y_{23} \\ -Y_{13} & -Y_{23} & Y_{33}+Y_{13}+Y_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_{L1} \\ U_{L2} \\ U_{L3} \end{pmatrix}$$

Weiterhin gilt: $-I_0 = I_{L1} + I_{L2} + I_{L3}$

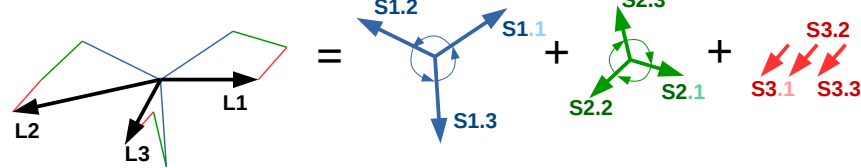
Das System heißt *symmetrisch*, falls $U_{L1} = \frac{1}{a} \cdot U_{L2} = \frac{1}{a^2} \cdot U_{L3}$ und $I_{L1} = \frac{1}{a} \cdot I_{L2} = \frac{1}{a^2} \cdot I_{L3}$ mit $a = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 \cdot e^{i \frac{2\pi}{3}}$. Es gilt:

$1 + a + a^2 = 0$ $a^3 = 1$ $U_{12} = U_1 - U_2 = U_1 \cdot \sqrt{3} \cdot e^{i 150^\circ}$. Durch das anmultiplizieren von a kann die Phase um 120° gedreht werden.

Symmetrische Komponenten

Für bestimmte Anwendungen ist eine Transformation des Drehstromsystems L1, L2, L3 in ein mathematisches Hilfssystem S1, S2, S3 hilfreich. Die S-Komponenten repräsentieren jeweils eine Komponente eines symmetrischen Systems (Mit-/ Gegen-/ Nullsystem):

Asymmetrischer Drehstrom Mitsystem Gegensystem Nullsystem Die Phase von L1 liegt definitionsgemäß auf 0° .



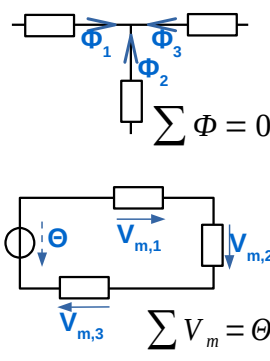
Es ergeben sich folgende Transformationsmatrizen:

$$\begin{pmatrix} L1 \\ L2 \\ L3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 \\ a & a^2 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Fortescue-Matrix } F} \cdot \begin{pmatrix} S1 \\ S2 \\ S3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} S1 \\ S2 \\ S3 \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{F^{-1}} \cdot \begin{pmatrix} L1 \\ L2 \\ L3 \end{pmatrix}$$

Magnetischer Kreis

Der Magnetische Kreis ist ein Netzwerk, das ähnlich wie der elektrische Kreis berechnet werden kann.

Knotengleichung: Aus $\text{div}(\vec{B}(\vec{x})) = 0$ folgt, dass die Summe aller magnetischer Flüsse in einem Knotenpunkt Null ist.



Maschengleichung: Aus $\oint_{\partial A} \vec{H} d\vec{s} = \Theta = \iint_A \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{s}$ folgt dass die Summe aller magnetischer Spannungen in einer Masche die magnetische Durchflutung ist. Baut man diese Durchflutung als Spannungsquelle in die Masche ein, so kann wie im elektrischen Kreis gerechnet werden. In allen Schaltungstopologien anwendbar???

Hopkinsonsches Gesetz: $V_m = R_m \cdot \Phi$

Magnetische Spannung $V_m = \int_l \vec{H}(\vec{x}) dl = [Am] \triangleq U$

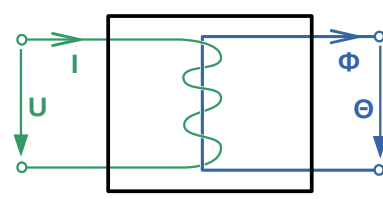
Magnetischer Fluss $\Phi = \int_A \langle \vec{B}(\vec{x}), \vec{n} \rangle dA = \left[\frac{Vs}{m} \right] \triangleq I$

Magn. Widerstand / Reluktanz $R_m = \frac{V_m}{\Phi} = \left[\frac{Am}{Vs} \right] \triangleq R$

Magnetischer Leitwert $\Lambda = \frac{1}{R_m} = \left[\frac{Vs}{Am} \right] \triangleq G$

Energie $W = V_m \cdot \Phi = [J] \triangleq P$

Spule als Kopplung



Eine Induktivität kann als Kopplung zwischen elektrischem - und magnetischem Kreis aufgefasst werden. Diese ist durch Kettenparameter beschreibbar:

$$\begin{pmatrix} U \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i\omega N \\ \frac{1}{N} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Theta \\ \Phi \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \Theta \\ \Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & N \\ \frac{-i}{\omega N} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U \\ I \end{pmatrix}$$

Die Matrix folgt aus dem Durchflutungs- und Induktionsgesetz: $\Theta = N \cdot I$ $U = -N \frac{\partial \Phi}{\partial t}$

Bei der Herleitung ist zu beachten, dass innerhalb der grünen Spulenmasche die Kirchhoffsche Gleichung nicht gilt, da das elektrische Feld hier nicht wirbelfrei ist; die induzierte Spannung entlang des grünen Weges (Wicklungsrichtung beachten!) zeigt bei steigendem Φ entgegen der Stromrichtung und U ist in eingezeichneter Richtung positiv!

Gemäß den Gleichungen für Kettenparameter⁵⁰ können einzelne Bauteile durch das Zweitor hindurch projiziert werden:

	Elektrischer Widerstand	Magnetischer Widerstand	Kapazität
Elektrischer Kreis	R	$\underline{X}_L = i\omega L = i\omega \frac{N^2}{R_m}$	$\underline{X}_C = -\frac{i}{\omega C}$
Magnetischer Kreis	$\frac{i\omega N^2}{R}$	R_m	$-\omega^2 \cdot N^2 \cdot C$

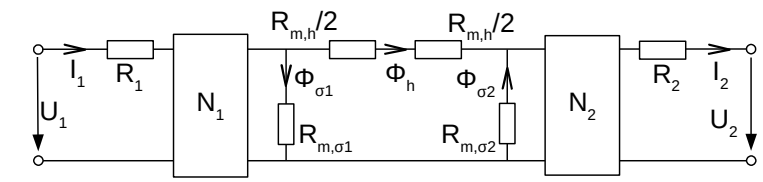
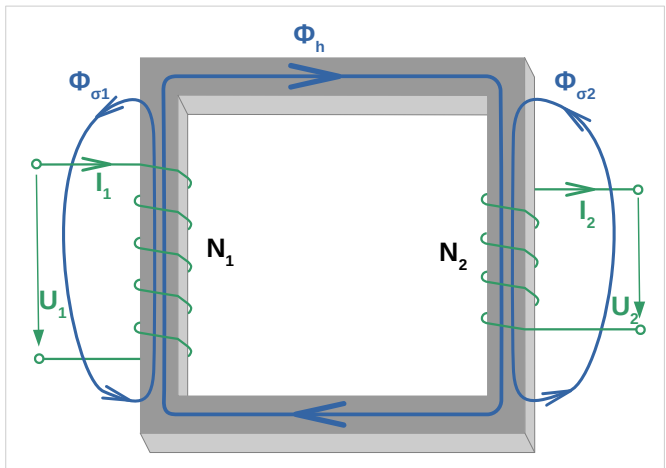
Die Spule ist eine gyratorische Kopplung, das heißt, ist eine Impedanz Z auf einer Seite parallel zum Zweitor geschaltet, so Z' nach der Projektion auf der anderen Seite in Reihe geschaltet und umgekehrt. Ein Kurzschluss auf einer Seite wird zu offenen Klemmen auf der anderen Seite!

Transformator

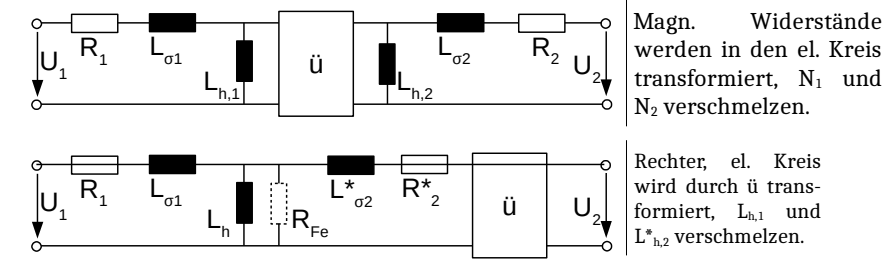
Idealer, einphasiger Transformator: Beim idealen Transformator wird angenommen, dass weder in den Wicklungen, noch im Kern Verluste auftreten und dass der gesamte magnetische Fluss durch beide Wicklungen geht. Eine Impedanz kann mit $Z^* = Z \cdot \ddot{u}^{-2}$ von der rechten auf die linke Seite transformiert werden.

$$T_{ideal} = \begin{pmatrix} \ddot{u} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\ddot{u}} \end{pmatrix} \quad \ddot{u} = \frac{N_1}{N_2}$$

Realer, einphasiger Transformator:



Rm,h ist hier halbiert, in der Mitte magnetischer Kreis.



Im letzten Schaltplan ist R_{Fe} hinzugekommen, welcher näherungsweise die Hystereseverluste im Kern darstellt. R_1 und R_2 sind die Widerstände der Spulenwicklungen, $L_{\sigma 1}$ und $L_{\sigma 2}$ die Streuinduktivitäten und L_h die Haupt- bzw. Kopplungsinduktivität. Gemäß den Transformationsbedingungen gilt:

$$\ddot{u} = \frac{N_1}{N_2} \qquad L_{\sigma 1} = \frac{N_1^2}{R_{m,\sigma 1}} \qquad L_{\sigma 2} = \frac{N_2^2}{R_{m,\sigma 2}} = \frac{1}{\ddot{u}^2} \cdot L_{\sigma 2}^* \qquad L_{h,1} = \frac{2 \cdot N_1^2}{R_{m,h}} \qquad L_{h,2} = \frac{2 \cdot N_2^2}{R_{m,h}} \qquad L_h = \frac{N_1^2}{R_{m,h}} \qquad R_{*2} = \ddot{u}^2 \cdot R_2$$

Der Transformator besitzt *Selbstinduktivitäten*: $L_1 = \frac{N_1 \cdot \Phi_{11}}{I_1} = \frac{N_1 \cdot (\Lambda_h + \Lambda_{\sigma 1}) \cdot \Theta_1}{I_1} = L_{\sigma 1} + L_h \qquad L_2 = \frac{N_2 \cdot \Phi_2}{I_2} = L_{\sigma 2} + \frac{L_h}{\ddot{u}^2}$

und *Gegeninduktivitäten*: $M_{12} = \frac{N_1 \cdot \Phi_{12}}{I_2} = \frac{N_1 \cdot k_2 \cdot \Phi_{22}}{I_2} = \frac{N_1 \cdot \Theta_2 \cdot \Lambda_h}{I_2} = N_1 \cdot N_2 \cdot \Lambda_h = M_{21} = \frac{N_2 \cdot \Phi_{21}}{I_1} := M$

Dabei ist Φ_{12} der von Strom I_2 hervorgerufene Fluss durch Spule 1 und Φ_{22} der durch Strom I_2 hervorgerufene Fluss durch Spule 2 (Φ_{21} und Φ_{11} äquivalent); demnach gilt $\Phi_h = \Phi_{12} + \Phi_{21}$. Man sieht, dass im Falle linearer, magnetischer Leitwerte M_{12} und M_{21} gleich sind.

$k_1 = \frac{\Phi_{12}}{\Phi_{22}} = \frac{\Lambda_h}{\Lambda_h + \Lambda_{\sigma 2}}$ und $k_2 = \frac{\Phi_{21}}{\Phi_{11}} = \frac{\Lambda_h}{\Lambda_h + \Lambda_{\sigma 1}}$ heißen *Flusskoppelfaktoren* und es gilt: $k_2 \cdot L_1 = N_1^2 \cdot \Lambda_h \quad \rightarrow \quad \Lambda_h^2 = \Lambda_h \cdot \Lambda_h = \left(\frac{k_2 \cdot L_1}{N_1^2} \right) \cdot \left(\frac{k_1 \cdot L_2}{N_2^2} \right) \quad \rightarrow$
 $M = N_1 \cdot N_2 \cdot \sqrt{\Lambda_h^2} = \sqrt{k_1 \cdot k_2 \cdot L_1 \cdot L_2} = k \cdot \sqrt{L_1 \cdot L_2}$ mit gemeinsamen *Kopplungsfaktor* $k = \sqrt{k_1 \cdot k_2}$. **Wozu Streufaktor $\sigma = 1 - k^2$???**

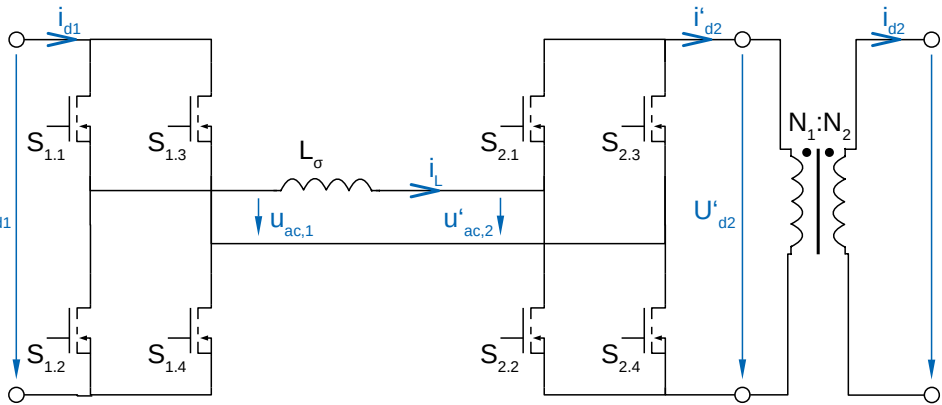
Für die Gesamtmatrix des realen Transformators in Kettenparametern gilt:

$$T_{real} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{Z_1}{Z_h} & Z_2 + Z_1 + \frac{Z_2 \cdot Z_1}{Z_h} \\ \frac{1}{Z_h} & 1 + \frac{Z_2}{Z_h} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \ddot{u} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\ddot{u}} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{matrix} Z_1 = R_1 + i \omega L_{\sigma 1} \\ Z_2 = R_{*2} + i \omega L_{\sigma 2}^* \end{matrix} \qquad Z_h = \frac{R_{Fe} + i \omega L_h}{R_{Fe} + i \omega L_h}$$

Leistungselektronik

Dual Active Bridge

Eine Dual Active Bridge besteht aus einem Transformator mit signifikanter Streuinduktivität sowie einer Vollbrücke auf jeder Seite. Der Einfachheit halber wird die Hauptinduktivität nicht betrachtet und der ideale Transformator von der Streuinduktivität getrennt und aus der Schaltung herausgeschoben, sodass im Folgenden nur die transformierten Größen I'_{d2} und U'_{d2} betrachtet werden müssen.



Eine Dual Active Bridge kann in unterschiedlichen Betriebsmodi betrieben werden. Typisch sind:

Phase Shift Operation, bipolar mode:

- Bipolar heißt hier, dass $u_{ac,1}$ und $u'_{ac,2}$ immer $\pm U_{d1}$ bzw. U_{d2} ist (von der Deadtime abgesehen).
- Bei der phase shift operation beträgt der dutycycle beider Vollbrücken immer 0,5.

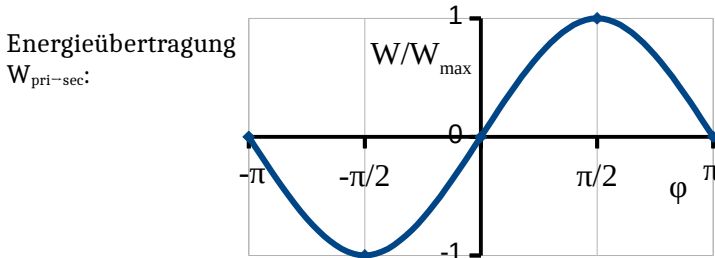
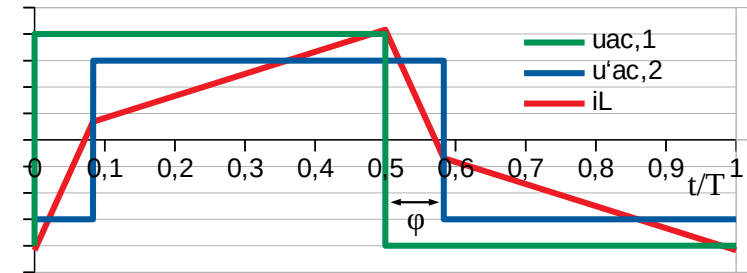
$$i_{L,pp} = \frac{T}{L_\sigma} \left(\frac{\phi}{\pi} \cdot U'_{d2} + \frac{1}{2} \cdot (U_{d1} - U'_{d2}) \right)$$

Die innerhalb einer Periode von der Sekundärseite aufgenommene Gesamtenergie beträgt:

$$W_{pri \rightarrow sec} = \frac{T^2 \cdot U_{d1} \cdot U'_{d2} \cdot \phi \cdot (\pi - |\phi|)}{2 \pi^2 \cdot L_\sigma} \quad \phi \in [-\pi .. \pi]$$

Probleme:

- große Stromflankensteilheit, da $u_{L,max} = U_{d1} + U_{d2}$ sein kann
- hoher Anteil an Blindleistung

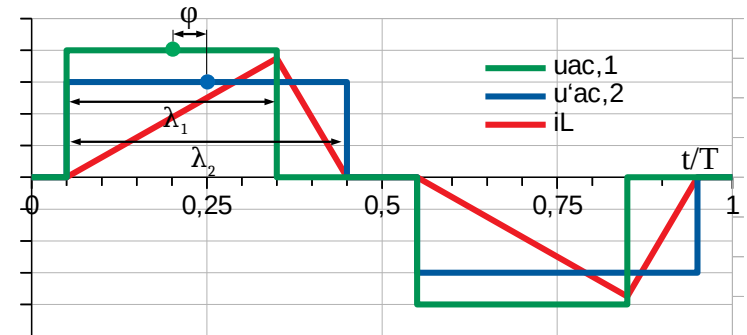


Triangular modulation, unipolar mode:

- Unipolar heißt, dass $u_{ac,1}$ und $u_{ac,2}$ zusätzlich einige Zeit Null sein dürfen (z.B. $S_{1.2} + S_{1.4}$ geschlossen).

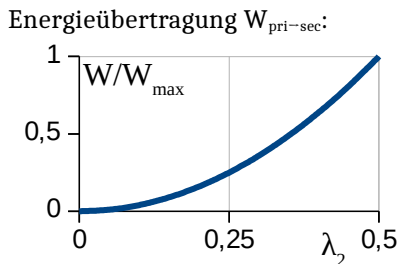
Definition: u_{ac} ist insgesamt für $\frac{\lambda}{2} \cdot T$ positiv (U_d), für weitere $\frac{\lambda}{2} \cdot T$ negativ ($-U_d$) und für $(1-\lambda) \cdot T$ Null.

- Definition: die Pulse von u'_{ac} auf der Seite mit niedrigerer Spannung (hier λ_2) liegen symmetrisch um $1/4T$ und $3/4T$.
- Die Mittelpunkte der anderen Seite (hier λ_1 / kürzere Pulse) sind um $\frac{\phi}{2\pi} T$ dazu verschoben; ϕ wird dabei so gewählt,



dass u_{ac1} und u_{ac2} entweder gleichzeitig an oder gleichzeitig aus gehen $\rightarrow \phi = \pm \pi \cdot (\lambda_2 - \lambda_1)$, wobei bei + (gleichzeitig an) Energie von der Seite mit der höheren Spannung zur Seite mit der niedrigeren Spannung transportiert wird und bei - (gleichzeitig aus) umgekehrt. Werte dazwischen wären sinnlos, da dies nur Blindleistung erzeugen würde.

- Bei der triangular modulation ist i_L zu Beginn und am Ende der Pulse Null $\rightarrow \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{U_{d1}}{U'_{d2}}$
- Bei $U_{d1} = U'_{d2}$ kann keine Energie transportiert werden!
 $\max(\lambda_1, \lambda_2) < 1/2$

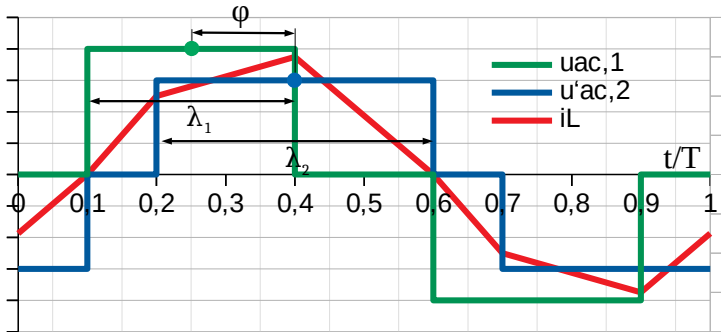


Die innerhalb einer Periode von der Sekundärseite aufgenommene Gesamtenergie beträgt:

$$W_{pri \rightarrow sec} = \frac{T^2 \cdot U_{d2}^2 \cdot \lambda_2^2 \cdot (U_{d1} - U_{d2})}{L_\sigma \cdot U_{d1}} \quad \lambda_2 \in \left[0 .. \frac{1}{2} \right] \text{ für } U_{d1} > U_{d2} \text{ und } \phi = +\pi \cdot (\lambda_2 - \lambda_1)$$

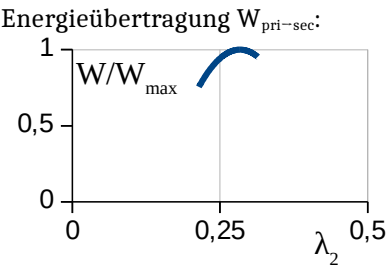
Trapezoidal modulation, unipolar mode:

- Bei der Trapezoidal Modulation wird die Spule/der Trafo zuerst mit nur einer Spannung (Hier die Primärseite, um Energie zur Sekundärseite zu transportieren) vorgeladen. Dann wird die andere Spannung zugeschaltet und länger angelassen, bis die Spule entladen ist. Die Pulse der Primärseite (die Energie liefert) liegen Symmetrisch um 1/4T bzw. 3/4T.
- Die Strompulse beginnen bei 0 und enden bei 0 $\rightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{U'_{d2}}{U_{d1}}$
- Die Strompulse dauern je eine halbe Periode, der Strom bleibt nicht auf 0 $\rightarrow \varphi = \pi \cdot (1 - \lambda_1 - \lambda_2) = \pi - \pi \cdot \lambda_1 - \frac{\pi \cdot \lambda_1 \cdot U_{d1}}{U'_{d2}}$



Die innerhalb einer Periode von der Sekundärseite aufgenommene Energie beträgt:

$$W_{pri \rightarrow sec} = \frac{-T^2 \cdot U_{d1}}{4 \cdot L_{\sigma} \cdot U'_{d2}} \cdot (4 \cdot U_{d1}^2 \cdot \lambda_1^2 + 4 \cdot U_{d1} \cdot U'_{d2} \cdot \lambda_1 \cdot (\lambda_1 - 1) + U'_{d2}^2 \cdot (2 \cdot \lambda_1 - 1)^2)$$
$$\lambda_1 \in \left[\frac{U'_{d2}}{2 \cdot (U'_{d2} + U_{d1})} \cdot \frac{U'_{d2}}{2 \cdot U_{d1}} \right]$$



Die maximale Energieübertragung erfolgt bei

$$\lambda_1 = \frac{U_{d2} \cdot (U_{d1} + U'_{d2})}{2 \cdot (U_{d1}^2 + U_{d1} \cdot U'_{d2} + U'_{d2}^2)} \text{ und beträgt } W_{max} = \frac{T^2 \cdot U_{d1}^2 \cdot U'_{d2}^2}{4 \cdot L_{\sigma} \cdot (U_{d1}^2 + U_{d1} \cdot U'_{d2} + U'_{d2}^2)}$$

Gate Driver

Gate treiber sind Verstärker, die die Signale des Controllers in Gate-Spannungen, die zu den verwendeten Transistoren passen, umwandeln. Gate Treiber sollen das Gate möglichst schnell auf- und entladen und sind daher so nah wie möglich am Halbleiter zu platzieren. Zusätzlich isolieren die meisten Treiber die Gate-Seite von den Signalen. Dadurch können z.B. auch Transistoren auf höherem Potential angesteuert werden.

- Falls die Versorgungsspannung zusammenbricht, muss der Treiber sicher abschalten (**Supply undervoltage lockout**)
- Halb- und Vollbrückentreiber müssen sicherstellen, dass niemals beide Transistoren an sind (**Signal Conditioning, ggf. dead time insertion**)

Des weiteren werden ggf. Schutzmechanismen benötigt:

Beim Abschalten von Stromführenden Halbleitern können parasitäre Induktivitäten eine Spannungsüberhöhung am Halbleiter verursachen. Einige Halbleitertypen werden dadurch beschädigt.

Soft/Two-Level-Turnoff

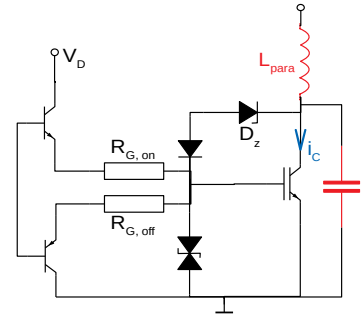
Beim TLTO wird die Gate-Spannung zunächst bis kurz vor die Threshold-Grenze reduziert, damit sich Überspannungen langsam abbauen können.

- Verschlechtert den Wirkungsgrad, auch wenn Überspannungen nicht immer und in gleicher Höhe auftreten

Active clamping

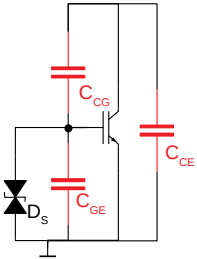
Eine Kombination aus Diode und Z-Diode wird zwischen Gate und Drain/Collector eingefügt. Ist die Spannung an D/C zu hoch (nah an der Breakdown-Voltage), fließt darüber Strom in den Treiber und steuert den Transistor ein Stück weit auf. Ggf. werden daher bewusst verschiedene Widerstände R_{G,on} und R_{G,off} verwendet.

- Energie aus D_z-Strom geht verloren. Fortschrittliche Treiber erlauben es, i_{Dz} zu erkennen um dann von sich aus eine Art TLTO auszulösen.



Gate supressor diodes

Sehr schneller Anstieg von V_{CE} / V_{DS}, insbesondere bei Kurzschlüssen, kann über parasitäre Kapazitäten eine (zu) hohe GS/GE-Spannung influenzieren. Diese kann mit einer Supressor-Diode unterdrückt werden.

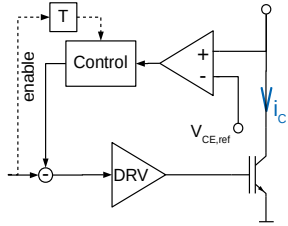


Desaturation / short circuit detection

Wenn im eingeschalteten Modus ein Kurzschluss auftritt, gehen insbesondere IGBTs in Sättigung und die Spannung am IGBT steigt signifikant an.

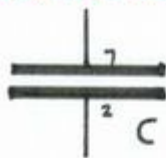
Ein zusätzlicher Schaltkreis kann dies erkennen und den IGBT dann abschalten.

Dieser Schaltkreis muss nach dem Einschalten einige Zeit deaktiviert bleiben, da Spannungsüberhöhungen nach dem Einschalten normal sind.



Elektrische Bauteile

Kondensator



Ein idealer Kondensator hat eine lineare Kapazität. Siehe auch: Feldtheorie: Elektrisches Feld: Kapazität.

$$Q = \int j \, dt = C \cdot U \quad W = \frac{1}{2} C \cdot U^2 = \frac{Q^2}{2C}$$

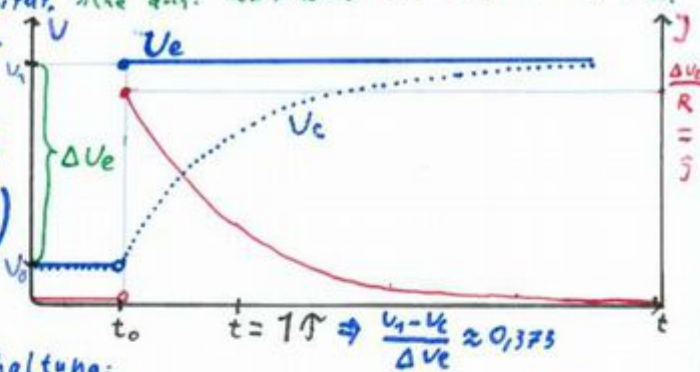
RL-Ladevorgang:

$$i(t) = C \cdot \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U_0 - U_C}{R} \quad \tau = R \cdot C$$

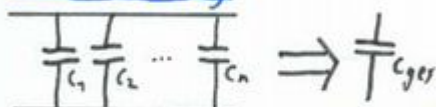
$$U_C(t) = U_1 - \Delta U_C \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = U_0 + \Delta U_C (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

$$\Rightarrow t = -\ln\left(\frac{U_1 - U_C(t)}{\Delta U_C}\right) \cdot \tau$$

$$i(t) = \tilde{j} \cdot e^{-t/\tau}$$

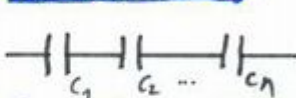


Parallelschaltung:



$$U_1 = U_2 = \dots = U_n \quad C_{ges} = C_1 + C_2 + \dots + C_n$$

Reihenschaltung:

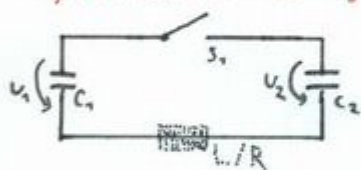


$$Q_1 = Q_2 = \dots = Q_n = Q$$

* Bei nicht-idealen Kondensatoren verschiebt sich dieses Verhältnis, bis sich die dem Spannungsteiler an den Kondensator-Widerständen, entsprechenden Spannungen einstellen.

$$C_{ges} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}} \quad U_i = U \cdot \frac{C_{ges}}{C_i}$$

Kondensator umladung:



Nach schließen von S_1 gilt: $U' = U_1' = U_2'$

$$U' = \frac{Q_{ges}}{C_{ges}} = \frac{Q_1 + Q_2}{C_1 + C_2} \quad Q_1' = C_1 \cdot U' = \frac{C_1(Q_1 + Q_2)}{C_1 + C_2} \quad Q_2' = C_2 \cdot U' = \frac{C_2(Q_1 + Q_2)}{C_1 + C_2}$$

$$W_{ges} = W_1 + W_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{Q_1^2}{C_1} + \frac{Q_2^2}{C_2} \right) \geq W_{ges}' = \frac{1}{2} \cdot (C_1 + C_2) \cdot \left(\frac{Q_1 + Q_2}{C_1 + C_2} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{(Q_1 + Q_2)^2}{C_1 + C_2}$$

Beim umladen geht Energie verloren. Diese verliert sich im Widerstand oder wird in einem schwingkreis mit einer Kabel-Induktivität gespeichert und mit der Zeit in den Raum abgestrahlt. \Rightarrow Es ist nicht möglich, zwei Kondensatoren ohne Induktivität zu verbinden!

Spule



Eine ideale Spule ist eine lineare Selbstinduktivität.

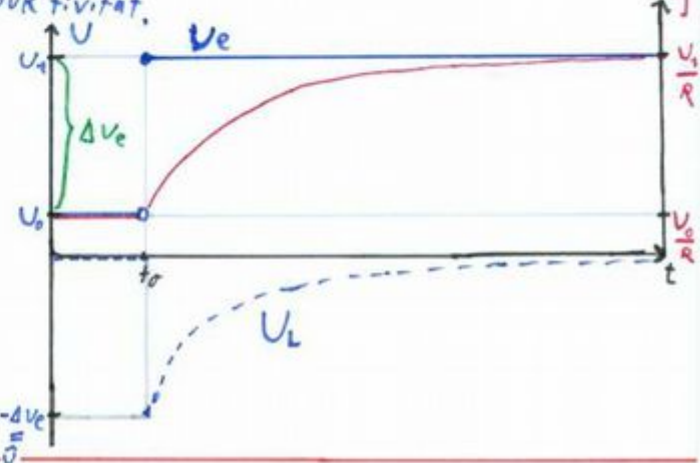
$$W = \frac{1}{2} L \cdot j^2$$

RL-Ladevorgang:

$$U_L(t) = L \cdot \frac{di}{dt} = \frac{j}{R} \quad \tau = \frac{L}{R}$$

$$i(t) = j_1 - \Delta j \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{U_1}{R} - \frac{\Delta U_C}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$U(t) = \tilde{U} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$



Parallelschaltung:

$$L_{ges} = \frac{1}{\frac{1}{L_1} + \dots + \frac{1}{L_n}}$$

Reihenschaltung:

$$L_{ges} = L_1 + \dots + L_n$$

Ladungstransport

Damit Strom fließen kann, müssen sich Ladungsträger (Elektronen) bewegen. Aus $\vec{F} = q \cdot \vec{E} = m_0 \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ folgt, dass das Teilchen Energie aufnehmen muss, um sich zu bewegen. In einem freien Atom können Elektronen nur bestimmte, diskrete Energie-niveaus annehmen; die Differenzen zwischen diesen Niveaus sind groß und können nur schwer überwunden werden.

↳ Kein Stromfluss möglich.

In Kristallen oder Elektronengasen können Atome miteinander wechselwirken.

↳ Es kommen zusätzliche Energieniveaus in der Nähe der ursprünglichen hinzu; dicht zusammenliegende Niveaus verschmelzen zu Energiebändern.

Außerhalb der Anziehungskraft des Atomkerns können Elektronen beliebige Energie aufnehmen (Kontinuum).

Das Kontinuum kann nur durch große Energiezufuhr erreicht werden (Plasmaleitung).

Stromfluss in Festkörpern ist nur möglich, wenn:

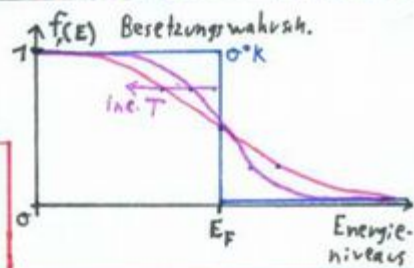
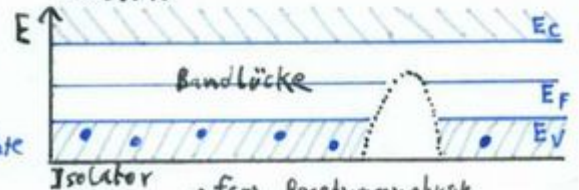
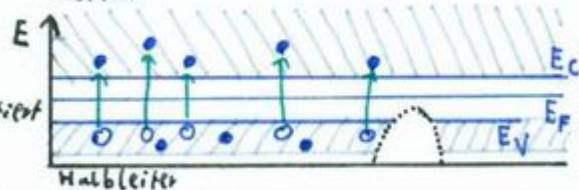
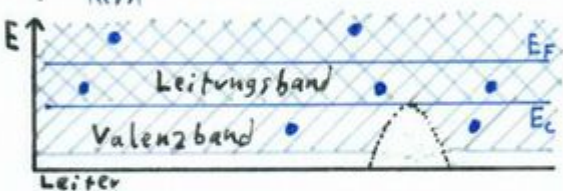
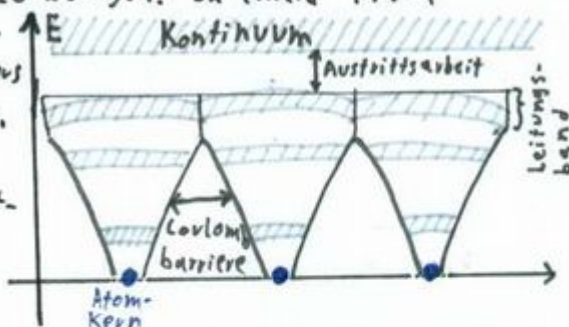
- Ein Leitungsband zwischen Coulombbarriere und Kontinuum existiert
- Das Leitungsband besetzt, aber nicht voll besetzt ist

Das Valenzband ist das höchste, (teilweise) besetzte Band des Atoms bei 0K. Bei 0K sind alle Energieniveaus unterhalb der Fermienergie E_F besetzt, alle Niveaus oberhalb frei.

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m_0} \sqrt{3\pi^2 n}^2$$

Plancksches h Teilchenmasse $m_0 = m_e$ Teilchendichte $n = \frac{N}{V}$

E_F liegt bei reinen Materialien meist nah an der Bandmitte E_i



Halbleiter

Halbleiter sind kristalline Materialien, deren Bandlücke so gering ist, dass bei Betriebstemperatur Elektronen in das Leitungsband springen können.

Es entstehen Elektronen-Loch-Paare. Ein Loch ist hier ein positiv geladener Atom.

Sowohl Elektronen als auch Löcher können sich im Leiter bewegen, also Bewegungsenergie aufnehmen.

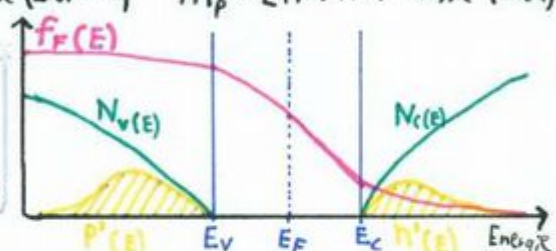
Diese Bewegung ist jedoch nicht frei. Es gilt ein komplexer Zusammenhang zwischen Energie und Geschwindigkeit. Dieser kann durch Einführung einer effektiven Masse beschrieben werden: $\vec{F} = q \cdot \vec{E} = m_{n/p}^* \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$

$$N_{c/v}(E) = \frac{(2m_{n/p}^*)^{3/2}}{2\pi^2 \hbar^3} \cdot \sqrt{E - E_{c/v}}$$

• Zustandsdichte: Anzahl an Energieniveaus pro Energie ΔE

$$f_F(E) = \frac{1}{1 + e^{\frac{E - E_F}{kT}}}$$

• Fermi-Dirac-Gleichung: Wahrscheinlichkeit, dass ein Zustand/Niveau besetzt ist



$$P'(E) = N_v(E) \cdot (1 - f_F(E))$$

Anzahl Löcher pro Energie im Valenzband

$$n'(E) = N_c(E) \cdot f_F(E)$$

Anzahl Elektronen pro Energie im Leitungsband

$$P_0 = \int_{-\infty}^{E_v} P'(E) dE \approx 2 \left(\frac{2\pi \cdot m_p^* \cdot k \cdot T}{h^2} \right)^{3/2} \cdot e^{-\frac{E_F - E_v}{k \cdot T}}$$

N_v : Äquivalente Zustandsdichte

$$n_0 = \int_{E_c}^{\infty} n'(E) dE \approx 2 \left(\frac{2\pi \cdot m_n^* \cdot k \cdot T}{h^2} \right)^{3/2} \cdot e^{-\frac{E_c - E_F}{k \cdot T}}$$

Ein Halbleiter befindet sich im thermischen Gleichgewicht, wenn er nicht durch äußere Faktoren (Spannung/Licht/...) gestört wird. Im thermischen Gleichgewicht gilt:

$$n_0 = p_0 = n_i = \left[\frac{1}{m} \right] \quad n_i = \sqrt{N_c \cdot N_v} \cdot e^{-\frac{E_c - E_v}{2kT}} \quad E_i := E_{F, \text{intrins}} = \frac{E_c + E_v}{2} + \frac{k \cdot T}{2} \ln \left(\frac{N_v}{N_c} \right) = \frac{E_c + E_v}{2} + \frac{3kT}{4} \ln \left(\frac{m_p^*}{m_n^*} \right)$$

Weichen durch äußere Effekte die tatsächlichen Ladungsträgerkonzentrationen (n, p) von den Gleichgewichtskonzentrationen (n_0, p_0) ab, werden sich Generations- und Rekombinationsrate (G_{nr}/R_{rp}) unterscheiden:

$$R_n - G_n = \frac{n - n_0}{\tau_n} \quad R_p - G_p = \frac{p - p_0}{\tau_p}$$

τ_{nr} ist die effektive Lebensdauer; sie hängt von vielen Prozessen ab und kann nur schwer berechnet werden.

→ Ströme im Halbleiter

$$\vec{J}_{diff}(\vec{x}) = q \cdot \underbrace{\frac{D_n \cdot K \cdot T \cdot n_n}{q}}_{\vec{J}_{diff,n}} \cdot \text{grad}(n(\vec{x})) - q \cdot \underbrace{\frac{D_p \cdot K \cdot T \cdot p_p}{q}}_{\vec{J}_{diff,p}} \cdot \text{grad}(p(\vec{x}))$$

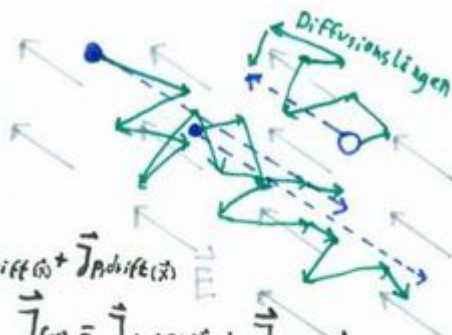
$$\vec{J}_{drift}(\vec{x}) = q \cdot (p \cdot \vec{v}_{dp} + n \cdot \vec{v}_{dn}) \cdot \vec{E}(\vec{x}) = q \cdot p \cdot \vec{v}_{dp} - q \cdot n \cdot \vec{v}_{dn} = \vec{J}_{n,drift}(\vec{x}) + \vec{J}_{p,drift}(\vec{x})$$

$\vec{v}_{d,n/p} = \mu_{n/p} \cdot \vec{E}$

Kontinuitätsgleichung: $\frac{\partial n(\vec{x})}{\partial t} = \frac{1}{q} \cdot \text{div}(\vec{J}_n(\vec{x})) - R_n + G_n$

$$\frac{\partial p(\vec{x})}{\partial t} = \frac{1}{q} \cdot \text{div}(\vec{J}_p(\vec{x})) - R_p + G_p$$

Diffusionslänge: $L_n = \sqrt{D_n \cdot \tau_n} = [m]$ $L_p = \sqrt{D_p \cdot \tau_p}$



$$\vec{J}(\vec{x}) = \vec{J}_{drift}(\vec{x}) + \vec{J}_{diff}(\vec{x})$$

$$\vec{J}_{n,p}(\vec{x}) = \vec{J}_{n,p,drift}(\vec{x}) + \vec{J}_{n,p,diff}(\vec{x})$$

Beweglichkeit: $\mu_{n/p} = \frac{q \cdot \tau}{m}$

mittlere freie Weglänge $\lambda = \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{\sigma}$
Mittlere Stoßzeit $\tau = \frac{\lambda}{v_{th}}$ $v_{th} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$

→ Dotierte Halbleiter

Durch hinzufügen geringer Mengen von Elementen, die ein Valenzelektron mehr (Donatoren) oder weniger (Akzeptoren) haben, als der Halbleiter, lassen sich schon bei geringen Temperaturen freie Elektronen oder Löcher erzeugen. Bei Betriebstemperatur des Halbleiters sind in der Regel alle Donatorelektronen im Leitungsband und alle Akzeptorlöcher beweglich im Valenzband. Für nicht-degenerierte Halbleiter lässt sich dann schreiben:

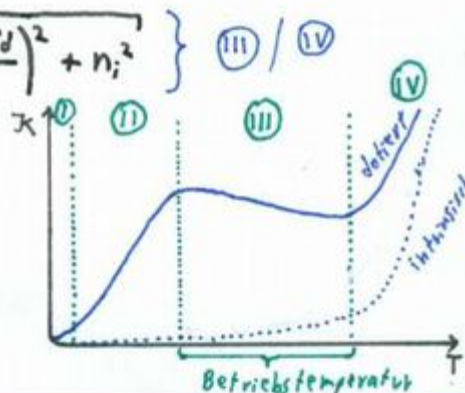
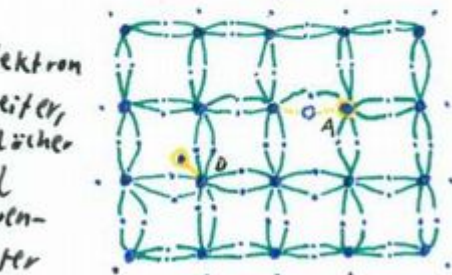
$$n_o = \frac{N_d - N_a}{2} + \sqrt{\left(\frac{N_d - N_a}{2}\right)^2 + n_i^2} \quad p_o = \frac{N_a - N_d}{2} + \sqrt{\left(\frac{N_a - N_d}{2}\right)^2 + n_i^2}$$

$$= n_i \cdot e^{\frac{E_F - E_i}{kT}}$$

$$= n_i \cdot e^{\frac{E_i - E_F}{kT}}$$

$$\rightarrow E_F = E_i + kT \cdot \ln\left(\frac{n_o}{n_i}\right) = E_i - kT \cdot \ln\left(\frac{p_o}{n_i}\right)$$

Weiterhin gilt $p_o \cdot n_o = n_i^2$ mit n_i, E_i wie bisher.

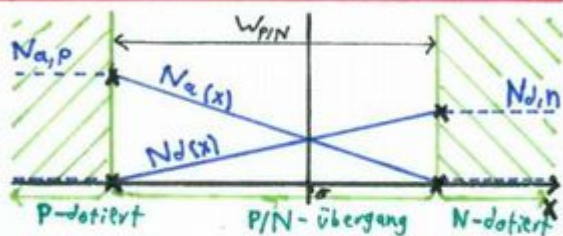


Linearer P/N-Übergang

Das Koordinatensystem sei so gewählt, dass bei $x=0$ gilt:

$N_a(0) = N_d(0)$. Daraus ergibt sich:

$$N_d(x) = \frac{N_{d,n}}{W_{P/N}} \cdot x + \frac{N_{a,p} \cdot N_{d,n}}{N_{a,p} + N_{d,n}} \quad N_a(x) = -\frac{N_{a,p}}{W_{P/N}} \cdot x + \frac{N_{a,p} \cdot N_{d,n}}{N_{a,p} + N_{d,n}}$$



$$\rightarrow n_o(x) = \frac{a}{2} x + \sqrt{\frac{a^2}{4} x^2 + n_i^2} \quad p_o(x) = -\frac{a}{2} x + \sqrt{\frac{a^2}{4} x^2 + n_i^2} \quad a = \frac{N_{a,p} + N_{d,n}}{W_{P/N}}$$

Aufgrund der verschiedenen Ladungsträgerdichten bildet sich ein Diffusionsstrom:

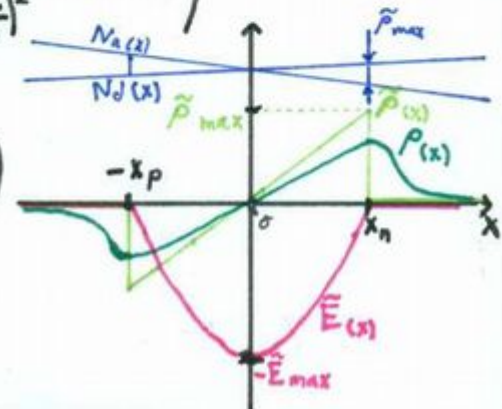
$$\vec{J}_{diff}(x) = K \cdot T \left(n_n \cdot \frac{\partial n_o(x)}{\partial x} - p_p \cdot \frac{\partial p_o(x)}{\partial x} \right) = \frac{K \cdot T \cdot a}{2} \left(\frac{N_n - p_p}{\sqrt{1 + \left(\frac{2n_i}{ax}\right)^2}} + N_n + p_p \right)$$

Aus dem Gauss'schen Satz folgt: $\epsilon \cdot \frac{\partial E(x)}{\partial x} = \rho(x)$

Diffusions- und Driftstrom müssen sich langfristig aufheben:

$$\vec{J}_{drift}(x) = K(x) \cdot E(x) := -\vec{J}_{diff}(x) \quad K(x) = \frac{q \cdot a \cdot x}{2} \left((N_n + p_p) \sqrt{1 + \left(\frac{2n_i}{ax}\right)^2} + N_n - p_p \right)$$

Somit ergibt sich: $\rho(x) = -\epsilon \cdot \frac{\partial}{\partial x} \frac{\vec{J}_{diff}(x)}{K(x)}$

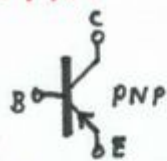


Da dieser Zusammenhang zu komplex ist, schreibt man:

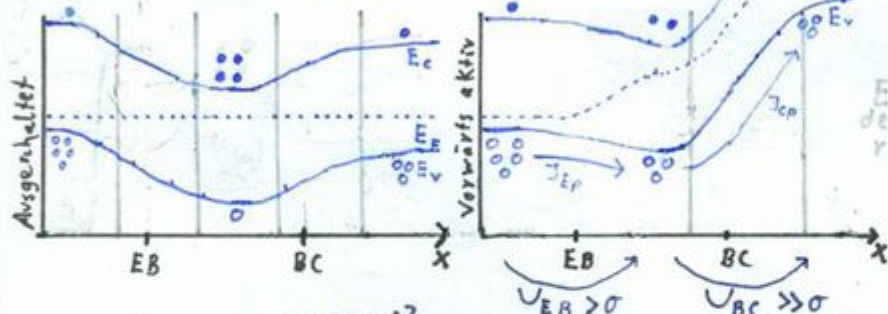
$$\tilde{\rho}(x) = \begin{cases} (N_d(x) - N_a(x)) \cdot q = a \cdot q \cdot x & \text{für } |x| < x_p \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad x_p = x_n$$

Bipolartransistor (BJT)

↳ PNP



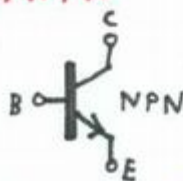
- $-I_E = I_{EP} + I_{EN} = I_{CP} + I_r + I_{EN}$
- $-I_B = I_r + I_{CN} - I_{EN}$
- $-I_C = I_{CP} + I_{EN}$



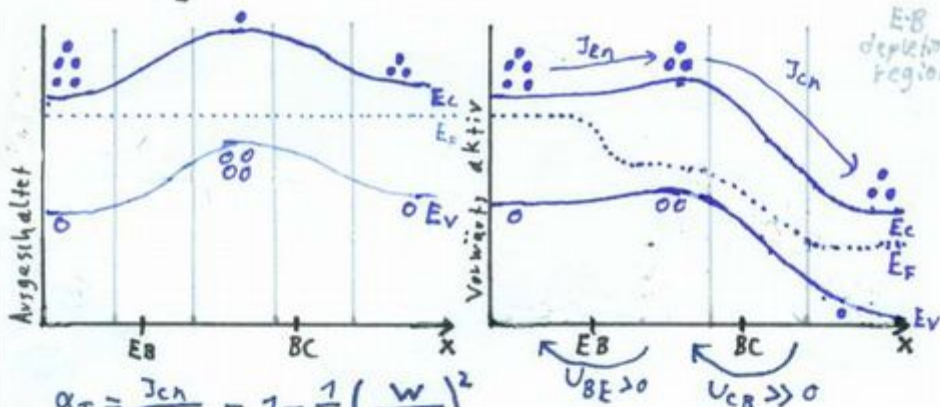
$$\alpha_T = \frac{I_{CP}}{I_{EP}} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{W}{L_{PB}} \right)^2$$

$$\gamma = \frac{I_{EP}}{I_{EP} + I_{EN}} = \frac{1}{1 + \frac{D_{NE} \cdot L_{PB} \cdot N_{DB} \cdot \sinh\left(\frac{W}{L_{PB}}\right)}{D_{PB} \cdot L_{NE} \cdot N_{AE} \cdot \cosh\left(\frac{W}{L_{PB}}\right)}} \approx 1 - \frac{D_{NE} \cdot N_{DB} \cdot W}{D_{PB} \cdot N_{AE} \cdot L_{NE}}$$

↳ NPN



- $I_E = I_{EN} + I_{EP} = I_{CN} + I_r + I_{EP}$
- $I_B = I_r + I_{EP} - I_{CP}$
- $I_C = I_{CN} + I_{CP}$

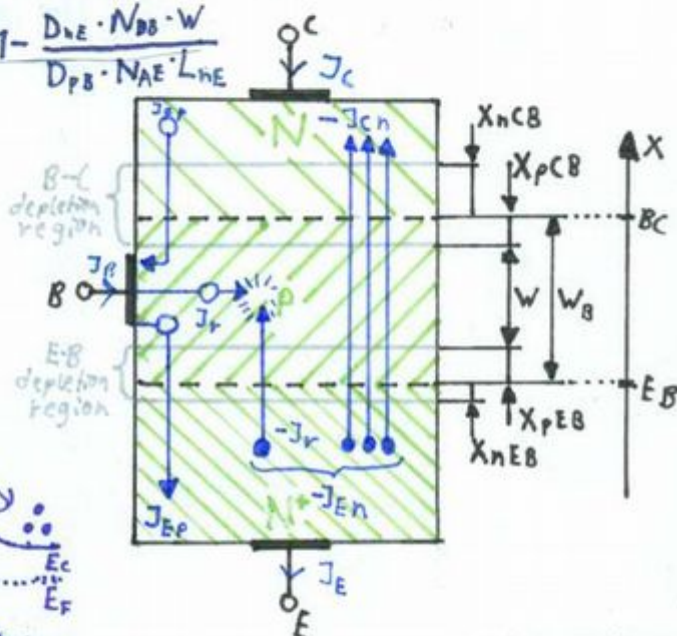
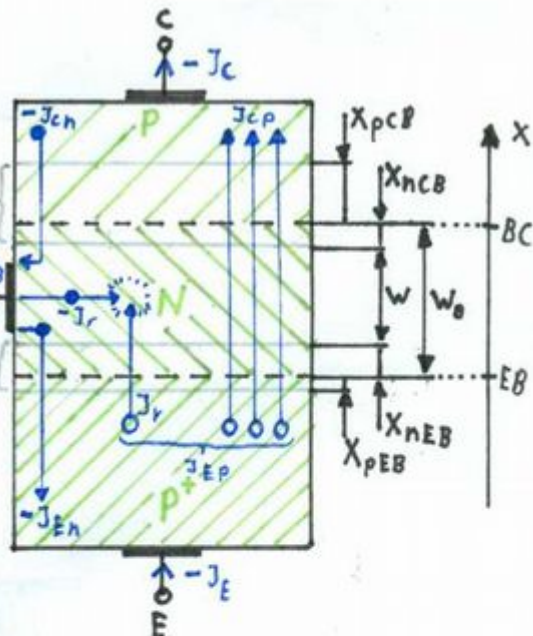


$$\alpha_T = \frac{I_{CN}}{I_{EN}} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{W}{L_{NB}} \right)^2$$

$$\gamma = \frac{I_{EN}}{I_{EN} + I_{EP}} = \frac{1}{1 + \frac{D_{PE} \cdot L_{NB} \cdot N_{AB} \cdot \sinh\left(\frac{W}{L_{NB}}\right)}{D_{NB} \cdot L_{PE} \cdot N_{DE} \cdot \cosh\left(\frac{W}{L_{NB}}\right)}} \approx 1 - \frac{D_{PE} \cdot N_{AB} \cdot W}{D_{NB} \cdot N_{DE} \cdot L_P}$$

Bedeutung der Variablen:

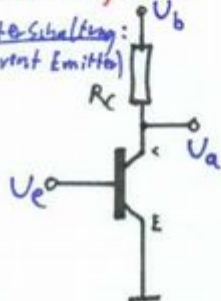
α_T	Basis-Transportfaktor	n_p/n_n	Anzahl fremder Ladungsträger	D_{xx}	Diffusionskonstante
γ	Emitter-Effizienz	N_{DX}/N_{AX}	Donatoren/Akzeptordichten	L_{xx}	Diffusionslänge



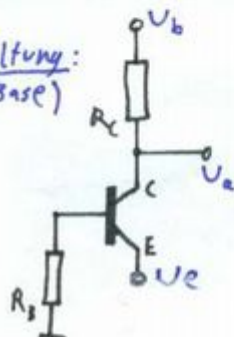
Im Vorwärts aktiven Betrieb befindet sich die CB-Diode im Sperrbetrieb. Bei dem Strom handelt es sich um Minoritäts-Ladungsträger.

Verstärkungstyp

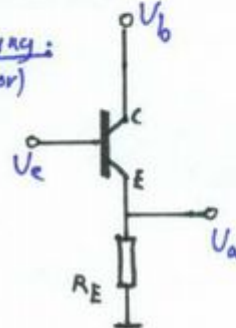
Emitterschaltung:
(Current emitter)



Basisschaltung:
(Current base)



Kollektorschaltung:
(Current collector)



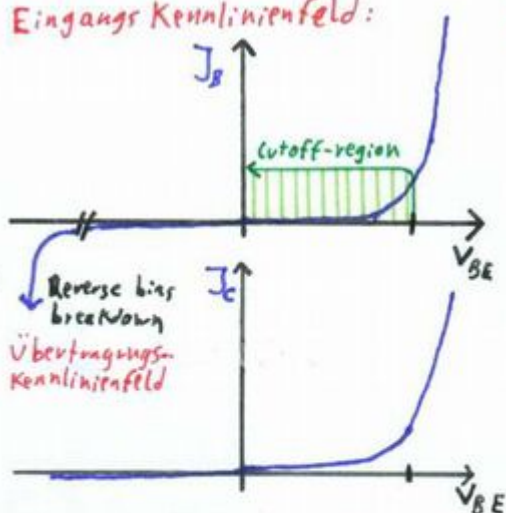
Stromgleichungen eines PNP-Transistors:

$$J_E = q \cdot A \left(\underbrace{\left(e^{\frac{V_{EB} \cdot q}{k \cdot T}} - 1 \right) \left(\frac{D_{nE} \cdot n_{E0}}{L_{nE}} + \frac{D_{pB} \cdot p_{B0}}{L_{pB} \cdot \tanh\left(\frac{W}{L_{pB}}\right)} \right)}_{J_{EH}} - \underbrace{\left(e^{\frac{V_{CB} \cdot q}{k \cdot T}} - 1 \right) \left(\frac{D_{pB} \cdot p_{B0}}{L_{pB} \cdot \sinh\left(\frac{W}{L_{pB}}\right)} \right)}_{J_{EP}} \right)$$

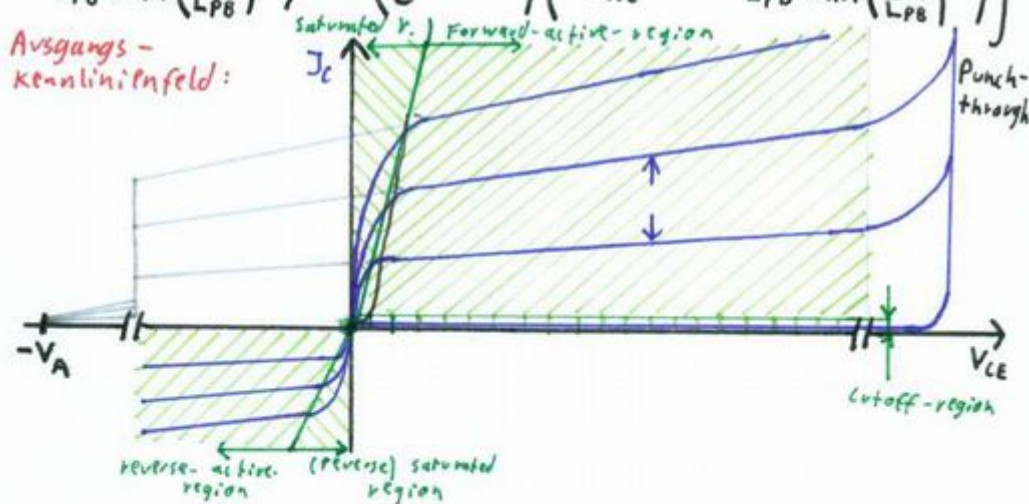
$$J_C = q \cdot A \left(\underbrace{\left(e^{\frac{V_{EB} \cdot q}{k \cdot T}} - 1 \right) \left(\frac{D_{pB} \cdot p_{B0}}{L_{pB} \cdot \sinh\left(\frac{W}{L_{pB}}\right)} \right)}_{J_{CP...}} - \underbrace{\left(e^{\frac{V_{CB} \cdot q}{k \cdot T}} - 1 \right) \left(\frac{D_{nC} \cdot n_{C0}}{L_{nC}} + \frac{D_{pB} \cdot p_{B0}}{L_{pB} \cdot \tanh\left(\frac{W}{L_{pB}}\right)} \right)}_{-J_{CN} \dots J_{CP}}$$

$$J_B = q \cdot A \left(\left(e^{\frac{V_{EB} \cdot q}{k \cdot T}} - 1 \right) \left(\frac{D_{nE} \cdot n_{E0}}{L_{nE}} + \frac{D_{pB} \cdot p_{B0} (\coth\left(\frac{W}{L_{pB}}\right) - 1)}{L_{pB} \cdot \sinh\left(\frac{W}{L_{pB}}\right)} \right) + \left(e^{\frac{V_{CB} \cdot q}{k \cdot T}} - 1 \right) \left(\frac{D_{nC} \cdot n_{C0}}{L_{nC}} + \frac{D_{pB} \cdot p_{B0} (\coth\left(\frac{W}{L_{pB}}\right) - 1)}{L_{pB} \cdot \sinh\left(\frac{W}{L_{pB}}\right)} \right) \right)$$

Eingangskennlinienfeld:



Ausgangskennlinienfeld:

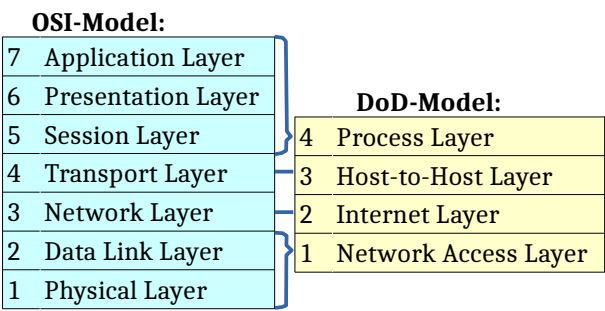


Durch das Anlegen äußerer Spannungen verschieben sich die Breiten der Verarmungszonen und somit auch die Basisweite W . Dieses Verhalten heißt Early-Effekt oder Basisweitenmodulation. In der Regel wird dieser Effekt nicht oder nur im forward-aktiven Betrieb beachtet. Dann lässt sich nach dem Ebers-Moll-Modell schreiben:

Informationsübertragung

Netzwerke

Für die meisten Netzwerke existiert eine Zerlegung in unterschiedliche Schichten, von denen jede bestimmte Aufgaben hat. Dabei existiert für die Verbindung von zwei Teilnehmern der gleichen Schicht ein *Protokoll* und jede Schicht bietet der Darüberliegenden einen *Service*.



Physical Layer:

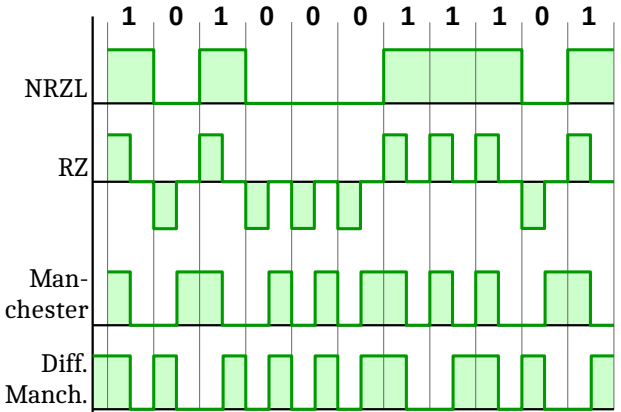
Der Physical Layer organisiert die prinzipielle Kommunikation zwischen zwei oder mehr Endpunkten. Im Physical Layer wird geregelt, ob die Kommunikation *Halb-* oder *Fullduplex* Leitungen verwendet, also ob zum Senden und Empfangen verschiedene Leitungen/Kanäle zur Verfügung stehen.

Mit Hilfe von *Autonegotiation* können im Physical Layer Duplexverfahren und Übertragungsgeschwindigkeit zwischen den Teilnehmern ausgehandelt werden.

Heute ungebräuchliche Halbduplex-Verfahren ermöglichen den Einsatz sogenannter *Hubs*, also Verbindungsstellen, die eingehende Signale direkt

verstärken und an alle Teilnehmer weiterleiten. Die dafür notwendige Kollisionserkennung ist nicht Aufgabe des Physical Layers. Er bietet als Service für höhere Layer lediglich das Senden und Empfangen von Bits und übernimmt die Signalmodulation, sowie erste Fehlerkorrekturen und -vermeidungsstrategien. Einfache Modulationen sind:

- *Binary Encoding:* Auch NRZL (No Return to Zero Level); ein Signal ist High für 1 und Low für 0, nicht selbstgetaktet / benötigt synchronen Taktgeber bei Sender und Empfänger; im Falle elektrischer Impulse muss ein fest definiertes Potential gegeben sein; 1 Bit/Symbol.
- *Return to Zero:* Auch RZ; zwischen High und Low existiert ein Zero-Zustand, nach jedem Bit wird zu Zero zurückgekehrt; erfordert drei fest definierte Potentialzustände; 0,5 Bit/Symbol.
- *Manchester Encoding:* Jeder Takt besteht aus zwei Teilintervallen I1, I2; eine 1 wird durch einen Sprung von High auf Low zwischen I1 und I2 übertragen, eine 0 durch Sprung von Low auf High (Oder genau umgekehrt bei Ethernetstandard); im Falle elektrischer Impulse muss ein fest definiertes Potential gegeben sein; 0,5 Bit/Symbol.
- *Differential Manchester Encoding:* Unterteilung der Symbole wie oben; in jedem Takt findet Sprung zwischen I1 und I2 statt, ein konstanter Pegel am Beginn des Takts signalisiert 1, ein Sprung am Beginn signalisiert 0 (Oder genau umgekehrt je nach Standard); eine Übertragung über galvanische Trennung ist möglich; 0,5 Bit/Symbol.



Typische Fehlervermeidungsstrategien sind:

- *Gray Code:* Zeitlich oder messtechnisch benachbarte Symbole unterscheiden sich nur um 1 Bit, sodass besonders wahrscheinliche Fehler weniger stark ins Gewicht fallen
- *Interleaving:* In der Realität werden bei einer Störung der Übertragung meist mehrere, aufeinander folgende Symbole gestört (Burstfehler); durch Interleaving werden die Bits in einem größeren Intervall vor der Übertragung gemischt, sodass trotz Burstfehler am Ende nur einzelne Bits in einer großen Datenmenge fehlerhaft sind und durch die Fehlerkorrektur korrigiert werden können.
- *Forward Error Correction:* Auch FEC, einfache Verfahren, um Fehler während der Übertragung zu korrigieren, etwa indem jedes Bit 3x gesendet wird.

Data Link Layer:

Der Data Link Layer ist in zwei Sublayer geteilt, deren genaue Definition jedoch nicht Teil des OSI-Modells ist:

- *Media Acces Control Sublayer:* Verhindern, dass mehrere Teilnehmer gleichzeitig einen Kanal benutzen; notwendig bei Halbduplex oder Token Ring Strukturen.
- *Logical Link Control Sublayer:* Fehlererkennung.

Im Data Link Layer werden Daten aufgeteilt in sogenannte *Frames* mit einer definierten minimalen und maximalen Länge. Ein Frame ist üblicher Weise wie folgt aufgebaut:

Start DLE	Destination MAC	Source MAC	Optional Info z.B. VLAN-Tag / Token	Data Length	Data Packet	End DLE	Check Seq
-----------	-----------------	------------	-------------------------------------	-------------	-------------	---------	-----------

Um die gesendeten Daten von den Frame Headern abzugrenzen gibt es folgende Möglichkeiten:

- Senden einer Längenangabe vor dem Datenblock - Problem: Sender und Empfänger werden im Falle eines Fehlers in der Längenangabe desynchronisiert

- Senden eines Delimiters (DLE) nach dem Datenblock. Eventuell vorhandene Delimiter im Datenblock müssen kodiert werden:
 - *Charakter Oriented*: Vor jedem DLE im Datenblock wird ein zweiter DLE eingefügt
 - *Bit Oriented*: Als Delimiter wird eine Folge von z.B. 6 Einsen gewählt, Sender fügt im Datenblock nach 5 zusammenhängenden Einsen eine Null ein, Empfänger entfernt eine Null nach 5 Einsen.
- Invalid Charakter im DLE verwenden. Wenn im Physical Layer z.B. Manchester Encoding verwendet wird, kann ein konstanter Pegel während eines kompletten Taktes benutzt werden, bei Return to Zero kann in einem Takt nicht auf Zero gesprungen werden. Solche Verfahren stellen eine Verschmelzung von Physical - und Data Link Layer dar und sind somit eine Verletzung des OSI Modells.

Im Data Link Layer besitzt jeder Teilnehmer eine eindeutige MAC (Im Falle von Ethernet ist dies eine 6 Byte große Zahl, die Hardwareseitig fest implementiert ist). Anhand der MAC (Die in jedem Frame als Ziel gesendet wird), kann ein Teilnehmer erkennen, ob der Frame für ihn bestimmt ist. Die MAC-Adresse FF-FF-FF-FF-FF-FF (Alle Bits 1) ist die Broadcast-Adresse.

Access Control Procedures:

Insbesondere bei dezentralen Halfduplex-Verbindungen muss sichergestellt sein, dass nicht zwei Teilnehmer gleichzeitig senden (Kollisionserkennung). Hierfür gibt es folgende *Random Access* Konzepte:

- Aloha (Purge / Slotted)
- CSMA (1- / p- / non-persistent)
- Binary Exponential Backoff

Alle diese Verfahren haben bezüglich QoS den Nachteil, dass im Worst-Case immer mehrere Stationen versuchen, zu senden. Die Alternative hierzu sind *Coordinated Access* Konzepte:

- Polling
- TDMA
- Token

Chiffriersystem

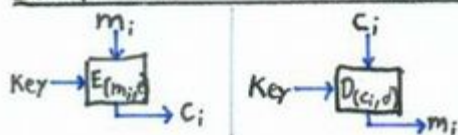
Ein Chiffriersystem ist ein 5-Tupel (P, C, K, E, D) mit P : Klartextraum, C : Chiffertextraum, K : Schlüsselraum, $E: P \times K \rightarrow C$ eine Funktion zum Verschlüsseln, $D: C \times K \rightarrow P$ eine Funktion zum Entschlüsseln. Es muss zu jedem $e \in K$ ein $d \in K$ existieren, sodass $D(E(m, e), d) = m$ gilt, nur dann ist das Verfahren Korrekt.

- Ein Chiffriersystem heißt symmetrisch, wenn $e = d \forall e \in K$
- Sei $|P| = |K| = |C| < \infty$; jeder Klartext $m \in P$ könne auftreten. Ein Chiffriersystem heißt perfekt sicher, wenn die Schlüssel $e \in K$ zufällig und gleichverteilt sind und zu jedem Paar aus $m \in P, c \in C$ genau ein Schlüssel $e \in K$ existiert, sodass $E(m, e) = c$
 \hookrightarrow weder die Kenntnis von c , noch Teile von m bringen dem Angreifer (ohne e) einen Vorteil. ($P_r(m|c) = P_r(m)$) (die Länge der Nachrichten)
 \hookrightarrow In einem perfekt sicheren Chiffriersystem ist e mindestens so lang, wie m
- Eine Verschlüsselungsfunktion heißt homomorph, wenn in P eine fundamentale Operation f_p und in C ein f_c existiert, sodass $E(f_p(m_1, \dots, m_n), e) = f_c(E(m_1, e), \dots, E(m_n, e))$
 \hookrightarrow additiv homomorph: $f_p = m_1 + \dots + m_n$ \hookrightarrow multiplikativ homomorph: $f_p = m_1 \cdot \dots \cdot m_n$
- Ver- und Entschlüsselungsfunktion kommutieren, wenn $D(E(m, d), e) = m$; $d \neq e$ also wenn die Verschlüsselung mit dem privaten Schlüssel d und die Entschlüsselung mit dem öffentlichen Schlüssel e möglich ist.
- Eine Verschlüsselungsfunktion heißt deterministisch, wenn die gleiche Nachricht bei gleichem Schlüssel immer auf das gleiche Chifftrat abgebildet wird.
- Ein Chiffriersystem heißt semantisch sicher, wenn alles, was bei Kenntnis von c effizient über m berechnet werden kann, auch ohne c effizient berechnet werden kann. Effizient bedeutet in polynomieller Zeit oder schneller.
 \hookrightarrow deterministische Verfahren können nicht semantisch sicher sein, da bei geringer Anzahl möglicher Klartexte, insbesondere bei asymmetrischen Verfahren, leicht ein Klartext zum Chifftrat geraten werden kann.
 \hookrightarrow Perfekt sichere Verfahren sind auch semantisch sicher, ein semantisch sicheres Verfahren ist genau dann perfekt sicher, wenn bei einer 1-Bit-langen Nachricht ein Angreifer diese aus dem Chifftrat mit genau 50% iger Wahrsch. erraten kann.

Blockchiffren

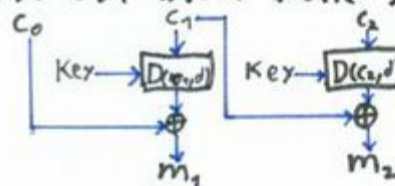
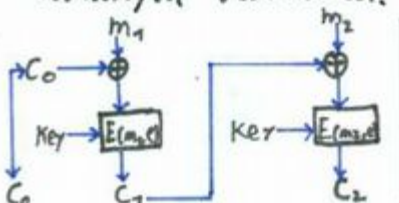
Bei Blockchiffren muss, im Gegensatz zu Stromchiffren, die Nachricht m eine bestimmte Länge haben, bzw. in Blöcke m_i mit fester Länge n zerlegt werden. Für die Verkettung von Blöcken beim Verschlüsseln gibt es verschiedene Moden:

Electronic codebook Mode (ECB): Jeder Block wird separat verschlüsselt



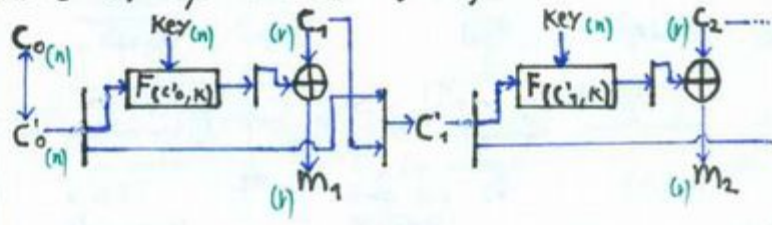
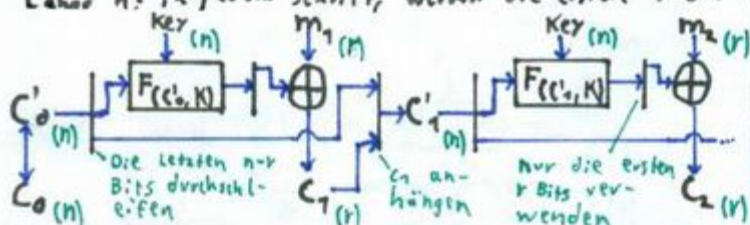
- schnell, direkter Zugriff auf beliebige Blöcke innerhalb des Chiffrates möglich
- Unsicher
- auch für asymmetrische Verfahren geeignet

Cipher Block Chaining Mode (CBC): Jeder Block wird vor der Verschlüsselung mit dem Vorherigen verrechnet. Für den ersten Block gibt es einen Initialisierungsvektor C_0



- Übertragungsfehler beeinflusst auch Folgeblock
- Auch für asymmetrische Verfahren geeignet
- Von BSI empfohlen

Cipher Feed back Mode (CFB): Blocklänge (v) kann kleiner sein, als Key-Länge (n). C_0 hat Länge n : in jedem Schritt, werden die ersten v Bits von C' abgehängt und C_i angehängt.



Periodensystem der Elemente

Periodic table of the elements

Tableau périodique des éléments

Tabla periódica de los elementos

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1 H 1.0079 -259.14 -252.87 2.2	2 He 4.0026 -272.2 -268.93	3 Li 6.941 1278 2970 1.5	4 Be 9.0122 2970 1.5	5 B 10.811 3367 4827 2.0	6 C 12.011 3367 4827 2.5	7 N 14.007 3367 4827 3.1	8 O 15.999 3367 4827 3.5	9 F 18.998 3367 4827 4.1	10 Ne 20.18 3367 4827 4.1	11 Na 22.990 97.81 882.9 1.0	12 Mg 24.305 97.81 882.9 1.0	13 Al 26.982 660.37 2467 1.5	14 Si 28.086 1410 2355 1.7	15 P 30.974 44.1 280 2.1	16 S 32.06 112.8 444.67 2.4	17 Cl 35.453 100.98 34.6 2.8	18 Ar 39.948 100.98 34.6 2.8
19 K 39.098 635.5 774 0.9	20 Ca 40.078 839 1484 1.0	21 Sc 44.956 1541 2831 1.2	22 Ti 47.88 1660 3287 1.3	23 V 50.942 1890 3380 1.5	24 Cr 51.996 1857 2672 1.6	25 Mn 54.938 1244 1962 1.6	26 Fe 55.845 1535 2750 1.6	27 Co 58.933 1495 2870 1.7	28 Ni 58.693 1453 2732 1.8	29 Cu 63.546 1083 2567 1.8	30 Zn 65.39 4196 907 1.7	31 Ga 69.723 2378 2403 1.8	32 Ge 72.61 327.4 2650 2.0	33 As 74.922 817 613 2.2	34 Se 78.96 217 684.9 2.5	35 Br 79.904 217 587.6 2.7	36 Kr 83.80 217 587.6 2.7
37 Rb 85.468 38.89 688 0.9	38 Sr 87.62 769 1384 1.0	39 Y 88.906 1522 3338 1.1	40 Zr 91.224 1852 4377 1.2	41 Nb 92.906 2468 4742 1.2	42 Mo 95.94 2617 4612 1.3	43 Tc 98.906 2172 4877 1.4	44 Ru 101.07 2310 3900 1.4	45 Rh 102.91 2430 3727 1.5	46 Pd 106.42 1552 3140 1.4	47 Ag 107.87 961.9 2212 1.4	48 Cd 112.41 320.9 765 1.5	49 In 114.82 50 2080 1.5	50 Sn 118.71 232.0 2270 1.7	51 Sb 121.76 630.7 1750 1.8	52 Te 127.60 449.5 990 2.0	53 I 126.90 113.5 184.4 2.2	54 Xe 131.29 113.5 184.4 2.2
55 Cs 132.91 28.40 678.4 0.9	56 Ba 137.33 725 1640 1.0	57-71 Lanthanides Lanthanides Lanthanides Lanthanides Lanthanides	72 Hf 178.49 2227 4602 1.2	73 Ta 180.95 2996 5425 1.3	74 W 183.84 3410 5660 1.4	75 Re 186.21 3180 5627 1.5	76 Os 190.23 3045 5027 1.5	77 Ir 192.22 2410 4130 1.6	78 Pt 195.08 1772 3827 1.4	79 Au 196.97 1064 2807 1.4	80 Hg 200.59 38.84 356.6 1.5	81 Tl 204.38 303.5 1457 1.4	82 Pb 207.2 327.5 1740 1.6	83 Bi 208.98 271.3 1560 1.7	84 Po 209 254 962 1.8	85 At 209.99 302 337 2.0	86 Rn 222.02 302 337 2.0
87 Fr 223.02 27 677 0.9	88 Ra 226.03 700 1140 1.0	89-103 Actinides Actinides Actinides Actinides Actinides	104 Rf 261.11 105 Db 262.11 106 Sg 266.12 107 Bh 268.12 108 Hs 269.13 109 Mt 271.15 110 Ds 272.15 111 Rg 277	112 Uub 277	113 Nh 284.12 107 114 Fl 289.10 108 115 Mc 290.10 109 116 Lv 293.10 110 117 Ts 294.10 111 118 Og 294.10 112	119 Uuh 294.10 113 120 Uuq 294.10 114 121 Uuo 294.10 115 122 Uuq 294.10 116 123 Uuo 294.10 117 124 Uuo 294.10 118	125 Uut 294.10 119 126 Uuq 294.10 120 127 Uuo 294.10 121 128 Uuo 294.10 122 129 Uuo 294.10 123 130 Uuo 294.10 124	131 Uut 294.10 125 132 Uuq 294.10 126 133 Uuo 294.10 127 134 Uuo 294.10 128 135 Uuo 294.10 129 136 Uuo 294.10 130 137 Uuo 294.10 131 138 Uuo 294.10 132 139 Uuo 294.10 133 140 Uuo 294.10 134 141 Uuo 294.10 135 142 Uuo 294.10 136 143 Uuo 294.10 137 144 Uuo 294.10 138 145 Uuo 294.10 139 146 Uuo 294.10 140 147 Uuo 294.10 141 148 Uuo 294.10 142 149 Uuo 294.10 143 150 Uuo 294.10 144 151 Uuo 294.10 145 152 Uuo 294.10 146 153 Uuo 294.10 147 154 Uuo 294.10 148 155 Uuo 294.10 149 156 Uuo 294.10 150 157 Uuo 294.10 151 158 Uuo 294.10 152 159 Uuo 294.10 153 160 Uuo 294.10 154 161 Uuo 294.10 155 162 Uuo 294.10 156 163 Uuo 294.10 157 164 Uuo 294.10 158 165 Uuo 294.10 159 166 Uuo 294.10 160 167 Uuo 294.10 161 168 Uuo 294.10 162 169 Uuo 294.10 163 170 Uuo 294.10 164 171 Uuo 294.10 165 172 Uuo 294.10 166 173 Uuo 294.10 167 174 Uuo 294.10 168 175 Uuo 294.10 169 176 Uuo 294.10 170 177 Uuo 294.10 171 178 Uuo 294.10 172 179 Uuo 294.10 173 180 Uuo 294.10 174 181 Uuo 294.10 175 182 Uuo 294.10 176 183 Uuo 294.10 177 184 Uuo 294.10 178 185 Uuo 294.10 179 186 Uuo 294.10 180 187 Uuo 294.10 181 188 Uuo 294.10 182 189 Uuo 294.10 183 190 Uuo 294.10 184 191 Uuo 294.10 185 192 Uuo 294.10 186 193 Uuo 294.10 187 194 Uuo 294.10 188 195 Uuo 294.10 189 196 Uuo 294.10 190 197 Uuo 294.10 191 198 Uuo 294.10 192 199 Uuo 294.10 193 200 Uuo 294.10 194 201 Uuo 294.10 195 202 Uuo 294.10 196 203 Uuo 294.10 197 204 Uuo 294.10 198 205 Uuo 294.10 199 206 Uuo 294.10 200 207 Uuo 294.10 201 208 Uuo 294.10 202 209 Uuo 294.10 203 210 Uuo 294.10 204 211 Uuo 294.10 205 212 Uuo 294.10 206 213 Uuo 294.10 207 214 Uuo 294.10 208 215 Uuo 294.10 209 216 Uuo 294.10 210 217 Uuo 294.10 211 218 Uuo 294.10 212 219 Uuo 294.10 213 220 Uuo 294.10 214 221 Uuo 294.10 215 222 Uuo 294.10 216 223 Uuo 294.10 217 224 Uuo 294.10 218 225 Uuo 294.10 219 226 Uuo 294.10 220 227 Uuo 294.10 221 228 Uuo 294.10 222 229 Uuo 294.10 223 230 Uuo 294.10 224 231 Uuo 294.10 225 232 Uuo 294.10 226 233 Uuo 294.10 227 234 Uuo 294.10 228 235 Uuo 294.10 229 236 Uuo 294.10 230 237 Uuo 294.10 231 238 Uuo 294.10 232 239 Uuo 294.10 233 240 Uuo 294.10 234 241 Uuo 294.10 235 242 Uuo 294.10 236 243 Uuo 294.10 237 244 Uuo 294.10 238 245 Uuo 294.10 239 246 Uuo 294.10 240 247 Uuo 294.10 241 248 Uuo 294.10 242 249 Uuo 294.10 243 250 Uuo 294.10 244 251 Uuo 294.10 245 252 Uuo 294.10 246 253 Uuo 294.10 247 254 Uuo 294.10 248 255 Uuo 294.10 249 256 Uuo 294.10 250 257 Uuo 294.10 251 258 Uuo 294.10 252 259 Uuo 294.10 253 260 Uuo 294.10 254 261 Uuo 294.10 255 262 Uuo 294.10 256 263 Uuo 294.10 257 264 Uuo 294.10 258 265 Uuo 294.10 259 266 Uuo 294.10 260 267 Uuo 294.10 261 268 Uuo 294.10 262 269 Uuo 294.10 263 270 Uuo 294.10 264 271 Uuo 294.10 265 272 Uuo 294.10 266 273 Uuo 294.10 267 274 Uuo 294.10 268 275 Uuo 294.10 269 276 Uuo 294.10 270 277 Uuo 294.10 271 278 Uuo 294.10 272 279 Uuo 294.10 273 280 Uuo 294.10 274 281 Uuo 294.10 275 282 Uuo 294.10 276 283 Uuo 294.10 277 284 Uuo 294.10 278 285 Uuo 294.10 279 286 Uuo 294.10 280 287 Uuo 294.10 281 288 Uuo 294.10 282 289 Uuo 294.10 283 290 Uuo 294.10 284 291 Uuo 294.10 285 292 Uuo 294.10 286 293 Uuo 294.10 287 294 Uuo 294.10 288 295 Uuo 294.10 289 296 Uuo 294.10 290 297 Uuo 294.10 291 298 Uuo 294.10 292 299 Uuo 294.10 293 300 Uuo 294.10 294 301 Uuo 294.10 295 302 Uuo 294.10 296 303 Uuo 294.10 297 304 Uuo 294.10 298 305 Uuo 294.10 299 306 Uuo 294.10 300 307 Uuo 294.10 301 308 Uuo 294.10 302 309 Uuo 294.10 303 310 Uuo 294.10 304 311 Uuo 294.10 305 312 Uuo 294.10 306 313 Uuo 294.10 307 314 Uuo 294.10 308 315 Uuo 294.10 309 316 Uuo 294.10 310 317 Uuo 294.10 311 318 Uuo 294.10 312 319 Uuo 294.10 313 320 Uuo 294.10 314 321 Uuo 294.10 315 322 Uuo 294.10 316 323 Uuo 294.10 317 324 Uuo 294.10 318 325 Uuo 294.10 319 326 Uuo 294.10 320 327 Uuo 294.10 321 328 Uuo 294.10 322 329 Uuo 294.10 323 330 Uuo 294.10 324 331 Uuo 294.10 325 332 Uuo 294.10 326 333 Uuo 294.10 327 334 Uuo 294.10 328 335 Uuo 294.10 329 336 Uuo 294.10 330 337 Uuo 294.10 331 338 Uuo 294.10 332 339 Uuo 294.10 333 340 Uuo 294.10 334 341 Uuo 294.10 335 342 Uuo 294.10 336 343 Uuo 294.10 337 344 Uuo 294.10 338 345 Uuo 294.10 339 346 Uuo 294.10 340 347 Uuo 294.10 341 348 Uuo 294.10 342 349 Uuo 294.10 343 350 Uuo 294.10 344 351 Uuo 294.10 345 352 Uuo 294.10 346 353 Uuo 294.10 347 354 Uuo 294.10 348 355 Uuo 294.10 349 356 Uuo 294.10 350 357 Uuo 294.10 351 358 Uuo 294.10 352 359 Uuo 294.10 353 360 Uuo 294.10 354 361 Uuo 294.10 355 362 Uuo 294.10 356 363 Uuo 294.10 357 364 Uuo 294.10 358 365 Uuo 294.10 359 366 Uuo 294.10 360 367 Uuo 294.10 361 368 Uuo 294.10 362 369 Uuo 294.10 363 370 Uuo 294.10 364 371 Uuo 294.10 365 372 Uuo 294.10 366 373 Uuo 294.10 367 374 Uuo 294.10 368 375 Uuo 294.10 369 376 Uuo 294.10 370 377 Uuo 294.10 371 378 Uuo 294.10 372 379 Uuo 294.10 373 380 Uuo 294.10 374 381 Uuo 294.10 375 382 Uuo 294.10 376 383 Uuo 294.10 377 384 Uuo 294.10 378 385 Uuo 294.10 379 386 Uuo 294.10 380 387 Uuo 294.10 381 388 Uuo 294.10 382 389 Uuo 294.10 383 390 Uuo 294.10 384 391 Uuo 294.10 385 392 Uuo 294.10 386 393 Uuo 294.10 387 394 Uuo 294.10 388 395 Uuo 294.10 389 396 Uuo 294.10 390 397 Uuo 294.10 391 398 Uuo 294.10 392 399 Uuo 294.10 393 400 Uuo 294.10 394 401 Uuo 294.10 395 402 Uuo 294.10 396 403 Uuo 294.10 397 404 Uuo 294.10 398 405 Uuo 294.10 399 406 Uuo 294.10 400 407 Uuo 294.10 401 408 Uuo 294.10 402 409 Uuo 294.10 403 410 Uuo 294.10 404 411 Uuo 294.10 405 412 Uuo 294.10 406 413 Uuo 294.10 407 414 Uuo 294.10 408 415 Uuo 294.10 409 416 Uuo 294.10 410 417 Uuo 294.10 411 418 Uuo 294.10 412 419 Uuo 294.10 413 420 Uuo 294.10 414 421 Uuo 294.10 415 422 Uuo 294.10 416 423 Uuo 294.10 417 424 Uuo 294.10 418 425 Uuo 294.10 419 426 Uuo 294.10 420 427 Uuo 294.10 421 428 Uuo 294.10 422 429 Uuo 294.10 423 430 Uuo 294.10 424 431 Uuo 294.10 425 432 Uuo 294.10 426 433 Uuo 294.10 427 434 Uuo 294.10 428 435 Uuo 294.10 429 436 Uuo 294.10 430 437 Uuo 294.10 431 438 Uuo 294.10 432 439 Uuo 294.10 433 440 Uuo 294.10 434 441 Uuo 294.10 435 442 Uuo 294.10 436 443 Uuo 294.10 437 444 Uuo 294.10 438 445 Uuo 294.10 439 446 Uuo 294.10 440 447 Uuo 294.10 441 448 Uuo 294.10 442 449 Uuo 294.10 443 450 Uuo 294.10 444 451 Uuo 294.10 445 452 Uuo 294.10 446 453 Uuo 294.10 447 454 Uuo 294.10 448 455 Uuo 294.10 449 456 Uuo 294.10 450 457 Uuo 294.10 451 458 Uuo 294.10 452 459 Uuo 294.10 453 460 Uuo 294.10 454 461 Uuo 294.10 455 462 Uuo 294.10 456 463 Uuo 294.10 457 464 Uuo 294.10 458 465 Uuo 294.10 459 466 Uuo 294.10 460 467 Uuo 294.10 461 468 Uuo 294.10 462 469 Uuo 294.10 463 470 Uuo 294.10 464 471 Uuo 294.10 465 472 Uuo 294.10 466 473 Uuo 294.10 467 474 Uuo 294.10 468 475 Uuo 294.10 469 476 Uuo 294.10 470 477 Uuo 294.10 471 478 Uuo 294.10 472 479 Uuo 294.10 473 480 Uuo 294.10 474 481 Uuo 294.10 475 482 Uuo 294.10 476 483 Uuo 294.10 477 484 Uuo 294.10 478 485 Uuo 294.10 479 486 Uuo 294.10 480 487 Uuo 294.10 481 488 Uuo 294.10 482 489 Uuo 294.10 483 490 Uuo 294.10 484 491 Uuo 294.10 485 492 Uuo 294.10 486 493 Uuo 294.10 487 494 Uuo 294.10 488 495 Uuo 294.10 489 496 Uuo 294.10 490 497 Uuo 294.10 491 498 Uuo 294.10 492 499 Uuo 294.10 493 500 Uuo 294.10 494 501 Uuo 294.10 495 502 Uuo 294.10 496 503 Uuo 294.10 497 504 Uuo 294.10 498 505 Uuo 294.10 499 506 Uuo 294.10 500 507 Uuo 294.10 501 508 Uuo 294.10 502 509 Uuo 294.10 503 510 Uuo 294.10 504 511 Uuo 294.10 505 512 Uuo 294.10 506 513 Uuo 294.10 507 514 Uuo 294.10 508 515 Uuo 294.10 509 516 Uuo 294.10 510 517 Uuo 294.10 511 518 Uuo 294.10 512 519 Uuo 294.10 513 520 Uuo 294.10 514 521 Uuo 294.10 515 522 Uuo 294.10 516 523 Uuo 294.10 517 524 Uuo 294.10 518 525 Uuo 294.10 519 526 Uuo 294.10 520 527 Uuo 294.10 521 528 Uuo 294.10 522 529 Uuo 294.10 523 530 Uuo 294.10 524 531 Uuo 294.10 525 532 Uuo 294.10 526 533 Uuo 294.10 527 534 Uuo 294.10 528 535 U									